UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΔΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, E. PICARD, H. POINCARÉ.

TOME NEUVIÈME. — ANNÉE 1903.

63040
24/10/04

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

(Tous droits réservés.)

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s5journaldemat09liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide;

PAR M. PAUL APPELL.

1. Lorsqu'on étudie analytiquement le mouvement d'un fluide, il est évident qu'il faut chercher à mettre en évidence les combinaisons analytiques qui représentent des éléments géométriques ou cinématiques *indépendants du choix des axes;* ce sont là les seuls éléments qui puissent avoir une signification physique. Ces éléments sont de deux sortes : ce sont, ou bien des *vecteurs* définis en chaque point du fluide, comme la vitesse, l'accélération ou le tourbillon, ..., ou bien des *quantités algébriques* ayant une valeur déterminée en chaque point P du fluide, comme la grandeur de la vitesse, la grandeur du tourbillon, le produit géométrique de la vitesse et du tourbillon, etc.; nous appellerons ces *quantités algébriques* des *fonctions du point* P : elles s'expriment analytiquement en fonction des coordonnées x, y, z

du point P, mais leurs valeurs en un point P sont *indépendantes* du choix des axes.

Pour l'étude et la formation systématique de grandeurs vectorielles et de fonctions de point, dans toutes les questions où elles peuvent se présenter, nous renverrons au Mémoire de M. Heinrich Burckhardt (*Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen;* 1893).

Nous nous proposons ici d'étudier quelques-unes de ces fonctions de point dans le mouvement d'un fluide, en nous limitant aux fonctions qui sont formées uniquement avec les dérivées *premières* des composantes de la vitesse par rapport à x, y, z et à celles qui s'y rattachent.

2. En employant les notations dites d'*Euler*, désignons par u, v, w les projections sur les axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, des composantes de la vitesse W de l'élément fluide qui, à l'instant t, passe au point P de coordonnées x, y, z. Nous nous proposons de construire les fonctions de point qu'on peut former avec les neuf dérivées partielles du Tableau suivant :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \dfrac{\partial w}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{array}\right.$$

D'après les notations bien connues, de la théorie de l'élasticité, nous poserons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\[2ex] \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\[2ex] 2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}; \end{array}\right.$$

on sait que les quantités ξ, η, ζ sont les projections du vecteur tourbillon Ω relatif au point P.

Si, au point P, on considère un élément linéaire fluide ds issu de P et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, au temps $t + dt$ cet élément a pris une longueur ds_1, son coefficient de dilatation est $\frac{ds_1 - ds}{ds}$. Les coordonnées d'un point de ds étant x, y, z, celles du point correspondant de ds_1 seront

$$x_1 = x + u\,dt, \qquad y_1 = y + v\,dt, \qquad z_1 = z + w\,dt;$$

on en déduit

$$dx_1 = dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)dt, \ldots;$$

puis, en négligeant les termes en dt^2 et posant $dx = \alpha\,ds$, $dy = \beta\,ds$, $dz = \gamma\,ds$,

$$ds_1^2 = ds^2[1 + 2(\varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta)dt].$$

Extrayons la racine carrée, en développant le deuxième membre par la formule du binome et retenant seulement les termes en dt, nous aurons

$$(3) \qquad \frac{ds_1 - ds}{ds} = (\varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta)dt:$$

tel est le coefficient de dilatation de l'élément ds pendant le temps dt. En divisant par dt, on a ce qu'on peut appeler la *vitesse de dilatation* $V(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'élément linéaire ds issu de P dans la direction α, β, γ.

$$(4) \qquad V(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon_1\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2 + \gamma_1\beta\gamma + \gamma_2\gamma\alpha + \gamma_3\alpha\beta.$$

On peut alors écrire la formule (3) comme il suit : appelons l la longueur de l'élément *infiniment petit* ds issu de P, $l + dl$ sa longueur ds_1 à l'instant $t + dt$, on aura

$$(5) \qquad \frac{1}{l}\frac{dl}{dt} = V(\alpha, \beta, \gamma).$$

Ces formules résultent des formules classiques de la déformation infiniment petite d'un milieu continu; nous en avons rappelé la démonstration pour préciser le sens de nos notations.

Le cône, réel ou imaginaire, formé par les directions issues de P et annulant $V(\alpha, \beta, \gamma)$ est le cône formé par les éléments fluides qui ne subissent ni allongement ni raccourcissement pendant le temps dt suivant l'instant t : on peut appeler ce cône le cône des *dilatations nulles* au point P à l'instant t. Ce cône a évidemment une situation indépendante du choix des axes. Il en est de même du cône *supplémentaire* obtenu en annulant la forme quadratique adjointe

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} V_a(\alpha, \beta, \gamma) = {} & (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\alpha^2 \\ & + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\beta^2 + (4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\gamma^2 \\ & + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\beta\gamma + 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\gamma\alpha \\ & + 2(\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\alpha\beta. \end{aligned}\right.$$

5. Cela posé, les six quantités suivantes ont des valeurs indépendantes du choix des axes rectangulaires et sont, par suite, des fonctions du point P :

$$(\mathrm{I})\qquad \theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \delta = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),$$

$$(\mathrm{III})\qquad \varkappa = 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2,$$

$$(\mathrm{IV})\qquad \Omega_2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$(\mathrm{V})\qquad \varrho = \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \gamma_1\eta\zeta + \gamma_2\zeta\xi + \gamma_3\xi\eta,$$

$$(\mathrm{VI})\quad \left\{\begin{aligned} \psi = {} & (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + (4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2)\eta^2 \\ & + 4(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2)\zeta^2 + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\eta\zeta \\ & + 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2)\zeta\xi + 2(\gamma_1\gamma_2 - 2\varepsilon_3\gamma_3)\xi\eta. \end{aligned}\right.$$

Chacune de ces six quantités est homogène par rapport aux dérivées du Tableau (1). Les trois premières dépendent seulement de la déformation : ce sont les invariants élémentaires de la forme quadratique $V(X, Y, Z)$. Les trois dernières dépendent, en outre, du tourbillon : la quatrième Ω^2 est le carré du vecteur tourbillon; la

cinquième est égale au produit de Ω^2 par la vitesse de dilatation $\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}$ de l'élément fluide l, issu de P et dirigé suivant le vecteur tourbillon Ω; la condition $\varphi = 0$ signifie que, au point P, le vecteur tourbillon Ω est situé sur le cône de dilatation *nulle*; la condition $\psi = 0$ signifie que le tourbillon est sur le cône supplémentaire. Les trois dernières fonctions sont nulles quand le tourbillon en P est nul.

Ces six invariants (I), (II), ..., (VI) sont indépendants d'après leurs significations géométriques. Mais il ne peut y avoir plus de six fonctions des neuf dérivées du Tableau (1) qui soient indépendantes du choix des axes, car, en faisant tourner les axes, on dispose de trois angles arbitraires et l'on peut faire prendre à trois des neuf dérivées (1) ou à trois des neuf quantités (2) des valeurs arbitraires.

Toute autre fonction des neuf dérivées (1), indépendante du choix des axes, pourra donc s'exprimer en fonction des six fonctions fondamentales (I), ..., (VI).

Par exemple, le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial y}, & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

est une fonction du point P; il est facile de l'exprimer en fonction des six fonctions fondamentales. En effet, on a, d'après les notations (2),

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_3 - \zeta, & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_2 + \eta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_3 + \zeta, & \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_2, & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_1 - \xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_2 - \eta, & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_1 + \xi, & \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_3, \end{array}\right.$$

Portant ces expressions dans le déterminant H et développant, on a

$$(8)\qquad H = \frac{1}{2}\varkappa + \varphi.$$

De même l'expression

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} K = (2\varepsilon_1\xi + \gamma_3\eta + \gamma_2\zeta)^2 + (\gamma_3\xi + 2\varepsilon_2\eta + \gamma_1\zeta)^2 \\ + (\gamma_2\xi + \gamma_1\eta + 2\varepsilon_3\zeta)^2 \end{aligned}\right.$$

est une fonction de point, facile à exprimer à l'aide des six fonctions fondamentales. En effet, on a

$$K - 4\theta\varphi = \xi^2[\gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)] + \ldots + 2\eta\zeta(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1) + \ldots,$$

en retranchant de cette expression le produit $\Omega^2\delta$, on trouve

$$K - 4\theta\varphi - \Omega^2\delta = (4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\xi^2 + \ldots + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\eta\zeta + \ldots = \psi.$$

Donc enfin

$$(10)\qquad K = 4\theta\varphi + \Omega^2\delta + \psi.$$

4. A l'instant t, dans chaque particule fluide, les six quantités (I), (II), ..., (VI) ont des valeurs déterminées. Si l'on suit la particule dans son mouvement, ces six quantités sont des fonctions de t; leurs dérivées totales, par rapport au temps, sont évidemment d'autres fonctions de point, c'est-à-dire d'autres fonctions ayant à chaque instant t, en chaque point P, des valeurs indépendantes du choix des axes. Seulement ces nouvelles fonctions dépendent non seulement des neuf dérivées (1) du vecteur vitesse $W(u, v, w)$, mais aussi des dérivées analogues du vecteur accélération J : elles sont égales à un invariant simultané des vecteurs vitesse et accélération suivi d'un polynome entier en θ, δ, $\varkappa$, Ω^2, φ et ψ.

Nous appellerons u', v', w' les projections sur les axes de l'accélération J de la particule fluide qui, au temps t, se trouve au point $P(x, y, z)$. Les quantités u', v', w' seront ainsi des fonctions de x, y, z, t.

Rappelons que, si l'on a une fonction $F(x, y, z, t)$ des coordonnées x, y, z d'une particule fluide et du temps t, la dérivée totale, par rapport au temps, $\frac{dF}{dt}$, de cette fonction, prise en suivant la particule dans son mouvement, est

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w + \frac{\partial F}{\partial t},$$

u, v, w désignant les projections de la vitesse de la particule.

On a ainsi, pour les projections de l'accélération J, les formules classiques

$$(\mathrm{J})\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t},\\ v' &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t},\\ w' &= \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Nous déduirons du vecteur $\mathrm{J}(u', v', w')$ neuf quantités analogues aux quantités (2) déduites du vecteur vitesse, en posant

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & \varepsilon'_2 &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z},\\ \gamma'_1 &= \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, & \gamma_2 &= \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, & \gamma_3 &= \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y},\\ 2\xi' &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, & 2\eta' &= \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, & 2\zeta' &= \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Les quantités ξ', η', ζ' sont les projections d'un vecteur Ω, issu de P, constituant le *tourbillon de l'accélération*, ou encore *l'accélération rotatoire*, suivant l'expression de M. Maurice Lévy [1].

Nous allons calculer les dérivées totales par rapport au temps des cinq premières fonctions fondamentales θ, δ, $\varkappa$, Ω^2, ς. Pour cela, nous calculerons d'abord

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt},\quad \ldots,\quad \frac{d\gamma_1}{dt},\quad \ldots \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{dt},\quad \ldots.$$

3. *Calcul de* $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, $\frac{d\gamma_1}{dt}$ et $\frac{d\xi}{dt}$. On a

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}u + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}v + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}w + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial t},$$

---

[1] *L'hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 15 décembre 1890).

ou, comme $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} v + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} w + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right];\end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right) - \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

D'où enfin, d'après les expressions (7) de $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ en fonction des ε_i, γ_i, ξ, η, ζ,

$$(12) \qquad \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_1' - \varepsilon_1^2 - \frac{1}{4}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) - \xi^2 + \Omega^2.$$

On aurait évidemment deux formules analogues pour ε_2 et ε_3.

Calculons de même les dérivées totales de γ_1, γ_3, γ_3, ξ, η, ζ par rapport au temps. Tout d'abord, on a, par une transformation identique à la précédente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dt}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv}{dt}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

D'après les notations précédentes, on a donc

$$(13) \quad \left\{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) &= \frac{\partial w'}{\partial y} - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_2 - \eta\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_3 - \zeta\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 + \xi\right)\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\right], \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= \frac{\partial v'}{\partial z} - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_2 + \eta\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_3 + \zeta\right) + \left(\frac{1}{2}\gamma_1 - \xi\right)\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_3\right)\right].\end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces relations membre à membre on a

$$(14) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_1' - \left[\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\eta\zeta\right]$$

et deux expressions analogues pour les dérivées de γ_2 et γ_3.

En retranchant membre à membre les deux relations (13), on a de même

$$(15)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi' - \left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi - \frac{1}{2}\gamma_3\eta - \frac{1}{2}\gamma_2\zeta\right]$$

ou, en remplaçant $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ par $\theta - \varepsilon_1$,

$$(16)\qquad \frac{d\xi}{dt} = \xi' - \theta\xi + \varepsilon_1\xi + \frac{1}{2}\gamma_3\eta + \frac{1}{2}\gamma_2\zeta;$$

par permutation circulaire, on obtient deux formules analogues pour les dérivées totales de η et de ζ.

On peut remarquer que ξ', η', ζ' seraient nuls si les accélérations dérivaient d'un potentiel.

Si l'on appelle ρ la densité du fluide à l'instant t au point x, y, z, l'équation de continuité s'écrit

$$(17)\qquad \theta = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt};$$

on voit alors que les équations telles que (16) se ramènent facilement à des équations données par Helmholtz. En effet, en y remplaçant θ par sa valeur (17), on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{\xi'}{\rho} + \varepsilon_1\frac{\xi}{\rho} + \frac{1}{2}\gamma_3\frac{\eta}{\rho} + \frac{1}{2}\gamma_2\frac{\zeta}{\rho};$$

cette équation n'est autre chose qu'une des équations de Helmholtz, reproduites dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique*, p. 350, avec l'hypothèse que l'accélération u', v', w' dérive d'un potentiel $Q(x, y, z, t)$, ce qui rend nuls les termes ξ', η', ζ'.

6. *Calcul de* $\frac{d\theta}{dt}$. — D'après les expressions (12) de $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$, on a immédiatement

$$(18)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2' + \varepsilon_3' - \theta^2 - \frac{1}{2}\delta + 2\Omega^2$$

où le premier terme du deuxième membre est une *fonction de point*, la *divergence* du vecteur accélération, d'après une terminologie expliquée dans le Tome III de mon *Traité de Mécanique*, Chapitre XXVIII.

Par exemple, si, dans un liquide incompressible, la divergence de l'accélération est nulle, on a

$$\theta = 0, \quad \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = 0;$$

donc

$$\delta = 4\Omega^2.$$

7. *Calcul de* $\frac{d\delta}{dt}$. — D'après la définition de δ, on a

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\gamma_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \ldots - 4\left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \ldots\right].$$

En remplaçant $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ et $\frac{d\gamma_1}{dt}$ par leurs expressions (12) et (14), nous aurons une somme qu'en peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dt} = {} & 2\Sigma[\gamma_1\gamma'_1 - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon'_1] - 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ & + 4\Sigma\varepsilon_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 2\Sigma\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ & + \Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 4\Sigma\gamma_1\eta_1\zeta \\ & - 4\Omega^2\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 4\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi^2,\end{aligned}$$

où chaque sommation Σ est étendue aux trois termes obtenus en permutant les indices 1, 2, 3 et les lettres ξ, η, ζ.

Or on a immédiatement

$$-2\Sigma\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 3\Sigma\gamma_1^2\varepsilon_1 - \theta(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2),$$
$$-4\Omega^2\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 4\Sigma(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\xi^2 = -4\Omega^2\theta - 4\Sigma\varepsilon_1\xi^2.$$

On peut donc écrire, d'après les expressions de δ et $\varkappa$,

$$(19) \qquad \frac{d\delta}{dt} = 2\Sigma[\gamma_1\gamma'_1 - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon'_1] - 3\varkappa - \theta\delta - 4\varrho - 4\Omega^2\theta.$$

Dans cette formule, le premier terme

$$\delta_{01} = 2\Sigma[\gamma_1\gamma_1' - 2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\varepsilon_1']$$

est une fonction de point : c'est un invariant simultané des deux vecteurs *vitesse* (u, v, w) et *accélération* (u', v', w'), qui se rattache à l'invariant analogue à δ, relatif à la forme quadratique

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon_1')X^2 + (\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_2')Y^2 + (\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_3')Z^2 + (\gamma_2 + \lambda\gamma_2')(\gamma_3 + \lambda\gamma_3')YZ \\ + (\gamma_3 + \lambda\gamma_3')(\gamma_1 + \lambda\gamma_1')ZX + (\gamma_1 + \lambda\gamma_1')(\gamma_2 + \lambda\gamma_2')XY :\end{aligned}$$

l'invariant analogue à δ est, pour cette forme,

$$\begin{aligned}\delta(\lambda) &= \Sigma[(\gamma_1 + \lambda\gamma_1')^2 - 4(\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon_2)(\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon_3')] \\ &= \delta + \lambda[2\Sigma\gamma_1\gamma_1' - 4\Sigma(\varepsilon_2\varepsilon_3' + \varepsilon_3\varepsilon_2')] + \lambda^2\delta .\end{aligned}$$

Le coefficient de λ, invariant simultané des deux formes quadratiques, pour tout changement d'axes rectangulaires, est précisément la quantité δ_{01}.

8. *Calcul de* $\frac{dz}{dt}$. — La valeur développée de $\frac{dz}{dt}$ est

$$\frac{dz}{dt} = \Sigma(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\frac{d\varepsilon_1}{dt} + \Sigma(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\frac{d\gamma_1}{dt};$$

en y remplaçant $\frac{d\varepsilon_1}{dt}$ et $\frac{d\gamma_1}{dt}$ par leurs expressions (12) et (14), on a donc

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} = {} & \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon_1 + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma_1] - \Sigma\varepsilon_1^2(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2\gamma_3(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1) \\ & - \Sigma\gamma_1(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \Omega^2\Sigma(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\zeta_1^2 + 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma_1\zeta_1].\end{aligned}$$

Le coefficient de Ω^2 est $-\delta$; la dernière somme Σ est ψ. L'ensemble des autres sommes, en laissant de côté la première, peut s'écrire

$$\begin{aligned}& - 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\theta + \Sigma\varepsilon_1^2\gamma_1^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) \\ & - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2^2\gamma_3^2 - \theta\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + 2\Sigma\varepsilon_1\gamma_1^2(\varepsilon_2 + \varepsilon_3).\end{aligned}$$

Remplaçons, dans la dernière somme, $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ par $\theta - \varepsilon_1$, nous aurons

$$\begin{aligned} &-\theta(4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_1\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2) \\ &-\tfrac{1}{4}\Sigma(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2) - \tfrac{1}{2}\Sigma\gamma_2^2\gamma_3^2 + \theta\Sigma\varepsilon_1\gamma_1^2 - \Sigma\varepsilon_1^2\gamma_1^2. \end{aligned}$$

Dans cette expression, la deuxième ligne est identiquement nulle, et la première est $-\theta\varkappa$. Donc enfin

$$(20) \qquad \frac{d\varkappa}{dt} = \Sigma[(4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon_1' + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma_1'] - \Omega^2\delta - \theta\varkappa - \psi.$$

Dans cette équation, le premier terme du second membre est encore un invariant simultané des vecteurs vitesse et accélération. Dans un liquide incompressible animé d'un mouvement irrotationnel. ($\theta = 0$, $\Omega = 0$), cet invariant est égal à $\frac{d\varkappa}{dt}$, car ψ est nul.

9. *Calcul de* $\frac{d\Omega^2}{dt}$. On a

$$\frac{d\Omega^2}{dt} = 2\left(\xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Remplaçant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ par leurs valeurs (16), on obtient immédiatement

$$(21) \qquad \frac{d\Omega^2}{dt} = 2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') - 2\theta\Omega^2 + 2\varphi.$$

Le premier terme du deuxième membre est le produit géométrique $\Omega\Omega'\cos(\Omega, \Omega')$ du tourbillon Ω et de l'accélération rotatoire Ω'; la quantité θ est égale à $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, enfin φ est égale à $\Omega^2\frac{dl}{l\,dt}$; l désignant la longueur d'un élément linéaire infiniment petit, issu de P à l'instant t dans la direction Ω, et $l + dl$ sa longueur à l'instant $t + dt$. On peut donc écrire, en divisant tous les termes

par 2Ω,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega' \cos(\Omega, \Omega') + \frac{\Omega}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\Omega}{l}\frac{dl}{dt}.$$

$$(22) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega}{\rho l}\right) = \frac{\Omega'}{\rho l}\cos(\Omega, \Omega').$$

Dans le cas où $\Omega \cos(\Omega, \Omega')$ est nul, soit que Ω' étant nul, les accélérations dérivent d'un potentiel, soit que Ω' fasse un angle droit avec Ω, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega}{\rho l}\right) = 0, \qquad \frac{\Omega}{\rho l} = \text{const.},$$

équation qui exprime une propriété élémentaire des tubes de tourbillon infiniment déliés, comme on le verra dans mon *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 396, n° 760.

10. *Calcul de* $\frac{d\xi}{dt}$. — En remarquant que l'expression (16) de $\frac{d\xi}{dt}$ peut s'écrire

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi' - \theta\xi + \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial\xi},$$

on a pour $\frac{d\rho}{dt}$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \sum \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \sum\left(\frac{d\xi_1}{dt}\xi^2 + \frac{d\eta_1}{dt}\eta^2\right) \\
&= \sum \frac{\partial\rho}{\partial\xi}\xi' + \sum(\xi_1'\xi^2 + \eta_1'\eta^2) \\
&\quad - \theta\sum \xi\frac{\partial\rho}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^2 \\
&\quad - \sum\left[\xi_1^2 + \frac{1}{4}(\eta_2^2 + \eta_3^2)\right]\xi^2 - \sum\left[\frac{1}{2}\eta_2\eta_3 + \eta_1(\xi_2 + \xi_3)\right]\eta^2 \\
&\quad - \sum(\eta_1^2 + \eta^2)\xi^2 - 2\sum \eta_1^2\eta^2.
\end{aligned}$$

Les deux dernières sommes se détruisent; on a, de plus,

$$\sum \xi\frac{\partial\rho}{\partial\xi} = 2\rho, \qquad \sum\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^2 = K,$$

K désignant l'invariant (9) calculé précédemment. Pour évaluer l'en-

semble des autres termes, remarquons que

$$\theta\varphi = \sum [\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2 + \sum [\gamma_1\varepsilon_1 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2,$$

$$\Omega^2\delta = \sum [\gamma_1^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2)]\xi^2 - 4\sum [\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)]\xi^2.$$

On en conclut :

$$\theta\varphi + \frac{1}{4}\Omega^2\delta + \frac{1}{4}\psi = \sum\left[\varepsilon_1^2 + \frac{1}{4}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2)\right]\xi^2 + \sum\left[\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\right]\eta\zeta,$$

où le deuxième nombre forme l'ensemble des termes restant à évaluer. On a ainsi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta) - 2\theta\varphi + \frac{1}{2}K - \theta\varphi - \frac{1}{4}\Omega^2\delta - \frac{1}{4}\psi,$$

ou, enfin, en remplaçant K par son expression (10),

$$(23) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi' + \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta) - \theta\varphi + \frac{1}{4}\Omega^2\delta + \frac{1}{4}\psi.$$

Dans cette expression, chacune des sommes

$$\sum \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\xi', \qquad \sum(\varepsilon_1'\xi^2 + \gamma_1'\eta\zeta)$$

est une fonction de point dépendant des dérivées par rapport à x, y, z des deux vecteurs (u, v, w) et (u', v', w'). La première somme serait nulle si les directions du tourbillon (ξ, η, ζ) et de l'accélération rotatoire (ξ', η', ζ') étaient conjuguées par rapport au cône des dilatations nulles.

11. *Remarque.* — En désignant par λ une quelconque des quatre quantités θ, δ, $\varkappa$, φ, on remarquera que, dans l'expression de $\frac{d\lambda}{dt}$, figure le terme $-\theta\lambda$. Si l'on fait passer ce terme dans le premier

membre en remplaçant θ par $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, on a, dans le premier membre, la quantité

$$\frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\theta = \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\rho}\right).$$

On obtient ainsi, à la place des formules (18), (19), (20) et (23), des formules un peu plus simples donnant les dérivées de $\frac{\theta}{\rho}$, $\frac{\delta}{\rho}$, $\frac{\varkappa}{\rho}$, $\frac{\xi}{\rho}$ par rapport à t.

Dans le cas où le mouvement est irrotationnel pour la particule considérée, les trois premières équations deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{\rho}\right) = A - \frac{1}{\rho}\frac{\delta}{\rho},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta}{\rho}\right) = B - 3\frac{\varkappa}{\rho},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varkappa}{\rho}\right) = C,$$

A, B, C désignant les trois invariants

$$A = \frac{1}{\rho}\sum \varepsilon'_1, \qquad B = \frac{1}{\rho}\delta_{01},$$

$$C = \frac{1}{\rho}\sum\left[(\gamma_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2)\varepsilon_1 + (\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1)\gamma'_1\right]$$

Si l'invariant C était constamment nul, on en déduirait que $\frac{\varkappa}{\rho}$ reste constant dans la molécule correspondante. S'il était possible que C et B fussent constamment nuls, on en déduirait que $\frac{\varkappa}{\rho}$ est constant et $\frac{\delta}{\rho}$ une fonction linéaire de t.

12. Des méthodes analogues peuvent être appliquées à toutes les fonctions de points formées avec u, v, w et leurs dérivées des divers ordres par rapport à x, y, z, par exemple aux fonctions W^2, $V(u, v, w)$, $V_a(u, v, w)$, $\Omega W\cos(\Omega, W)$, ...

Sur les percussions dans les systèmes non holonomes;

PAR MM. BEGHIN ET ROUSSEAU.

On sait que les équations de Lagrange s'appliquent au mouvement d'un système holonome; on peut en déduire, comme l'a montré M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1896, premier fascicule), une forme simple des équations donnant la théorie des percussions pour un système de cette nature. On sait, d'autre part, que les équations de Lagrange ne s'appliquent plus quand certaines liaisons ne sont pas exprimables par des relations en termes finis, c'est-à-dire quand le système n'est plus holonome : on peut alors remplacer en Dynamique les équations de Lagrange par celles que M. Appell a indiquées dans le *Journal de Crelle* (t. 121) et développées dans deux Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques* (1900, premier fascicule, et 1901, premier fascicule).

Nous nous proposons de montrer que, même pour ces derniers systèmes, on peut conserver, pour la théorie des percussions, la forme d'équations déduite des équations de Lagrange.

Pour cela, nous établirons cette forme d'équations par une méthode nouvelle qui nous permettra d'en généraliser l'application.

Considérons un système de corps solides soumis à des liaisons exprimables par des équations intégrables ou non. Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les paramètres indépendants, définissant la position du système. Supposons que, pendant l'intervalle de temps $t_0 t_1$, on introduise de nouvelles liaisons et des percussions données. Parmi ces liaisons,

un certain nombre pourront s'exprimer par des relations en termes finis de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0, \\ \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_k, t) = 0 \end{cases}$$

et d'autres par des relations différentielles non intégrables de la forme

$$(2)\quad \begin{cases} A_{11}dq_1 + A_{12}dq_2 + \ldots + A_{1k}dq_k + A_1 dt = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{s1}dq_1 + A_{s2}dq_2 + \ldots + A_{sk}dq_k + A_s dt = 0. \end{cases}$$

Il est bien entendu que ces liaisons n'existent pas forcément toutes à l'instant t_0, mais qu'elles s'établissent progressivement de façon à avoir existé à l'instant t_1.

Pour trouver l'état des vitesses à l'instant t_1, nous savons qu'il suffit d'exprimer que le système des vecteurs, représentant la variation de quantité de mouvement de chaque point changée de sens, fait équilibre au système des vecteurs qui représentent les percussions.

On est donc ramené à un problème purement géométrique : l'équilibre d'un système de vecteurs.

Nous le traiterons en appliquant le principe des vitesses virtuelles. Nous écrirons que la somme des travaux virtuels de tous ces vecteurs est nulle pour tout déplacement compatible avec toutes les liaisons introduites ou préexistantes. Nous supposerons que, dans ces déplacements, les percussions de liaisons donnent des travaux virtuels nuls. Ce sera, par exemple, le cas d'un corps qui vient heurter un plan sur lequel il peut glisser avec frottement, ce frottement étant assez considérable pour qu'à la fin de la percussion le corps roule sans glisser. La percussion sera alors représentée par un vecteur quelconque appliqué au point de contact; et, pour tout déplacement virtuel dans lequel le corps roule sur le plan, le travail de ce vecteur sera nul.

Nous poserons :

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & d\mu_1 = \Lambda_{11} dq_1 + \ldots + \Lambda_{1k} dq_k + \Lambda_1 dt, \\
\lambda_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_r = \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_k, t), & d\mu_s = \Lambda_{s1} dq_1 + \ldots + \Lambda_{sk} dq_k + \Lambda_s dt.
\end{array}$$

Si $n = k - r - s$, on pourra prendre pour paramètres, au lieu de $q_1 q_2 \ldots q_k$, les quantités $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r$; $\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s$; $q_1 q_2 \ldots q_n$. Les nouvelles liaisons introduites s'exprimeront par les équations

$$\lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_r = 0; \qquad d\mu_1 = 0, \quad \ldots \quad d\mu_s = 0.$$

Calculons dans ces conditions les travaux virtuels de ces vecteurs.

1° *Travail virtuel des variations des quantités de mouvement.* — L'expression de ce travail est

$$\delta\tau = \Sigma m[(x'_1 - x'_0)\delta x + (y'_1 - y'_0)\delta y + (z_1 - z_0)\delta z].$$

Or, avant la percussion, on peut exprimer le déplacement $dx\,dy\,dz$ d'un point quelconque (x, y, z) du système par des expressions intégrables ou non de la forme

$$\begin{array}{ll}
dx = a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \ldots + a_k dq_k + a\,dt, & \\
dy = b_1 dq_1 + \ldots & + b\,dt, \\
dz = c_1 dq_1 + \ldots & + c\,dt,
\end{array}$$

où $a_1, a_2, \ldots, c$ sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_k, t$.

Effectuons le changement de variables indiqué; nous pourrons calculer $dq_{n+1} \ldots dq_k$ à l'aide des équations linéaires (2) et des équations

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} dq_k + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial \varphi_r}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial q_k} dq_k + \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial t} dt = 0
\end{array}$$

obtenues en différentiant les équations (1).

Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}
dx = {} & \alpha_1 \quad dq_1 + \ldots + \alpha_n dq_n + \alpha_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
& + \alpha_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \alpha_k d\mu_s + \alpha\, dt, \\
dy = {} & \beta_1 \quad dq_1 + \ldots + \beta_n dq_n + \beta_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
& + \beta_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \beta_k d\mu_s + \beta\, dt, \\
dz = {} & \gamma_1 \quad dq_1 + \ldots + \gamma_n dq_n + \gamma_{n+1} d\lambda_1 + \ldots \\
& + \gamma_{n+r+1} d\mu_1 + \ldots + \gamma_k d\mu_s + \gamma\, dt.
\end{aligned}$$

Dans un déplacement virtuel pour lequel

$$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_2 = \ldots = \delta\mu_1 = \ldots = \delta t = 0,$$

l'expression de $\delta\varpi$ sera

$$\begin{aligned}
\delta\varpi = \sum m\,[& (x'_1 - x'_0)(\alpha_1 \delta q_1 + \ldots + \alpha_n \delta q_n) \\
& + (y'_1 - y'_0)(\beta_1 \delta q_1 + \ldots + \beta_n \delta q_n) \\
& + (z'_1 - z'_0)(\gamma_1 \delta q_1 + \ldots + \gamma_n \delta q_n)].
\end{aligned}$$

Posons

$$2\,\mathrm{T} = \sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

et remarquons que la vitesse du point (x, y, z) a pour projections

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k \mu'_s + \alpha, \\
y' &= \beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k \mu'_s + \beta, \\
z' &= \gamma_1 q'_1 + \gamma_2 q'_2 + \ldots + \gamma_k \mu'_s + \gamma,
\end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\partial x'}{\partial q'_1}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{\partial x'}{\partial q'_n}, \\
\beta_1 &= \frac{\partial y'}{\partial q'_1}, \quad \ldots, \quad \beta_n = \frac{\partial y'}{\partial q'_n}, \\
\gamma_1 &= \frac{\partial z'}{\partial q'_1}, \quad \ldots, \quad \gamma_n = \frac{\partial z'}{\partial q'_n}.
\end{aligned}$$

Or, le coefficient de δq_1 dans l'expression de $\delta \varpi$ a pour valeur

$$\sum m(x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1)'_0;$$

il peut donc s'écrire

$$\sum m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right)'_0$$

et par suite

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)'_0;$$

on a donc

$$\delta \varpi = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)'_0 \delta q_1 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)'_0 \delta q_n.$$

2. *Travail virtuel des percussions données.* — On sait qu'on peut mettre ce travail sous la forme

$$\delta \varpi' = Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n.$$

Nous avons donc à écrire, quels que soient les déplacements $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$, l'égalité

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)'_0 \delta q_1 + \ldots + \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)'_0 \delta q_n = Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

qui se décompose en les suivantes :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right)'_0 = Q_1, \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q'_n}\right)'_0 = Q_n.$$

On retrouve ainsi les équations de Lagrange.

Remarque I. — Il peut arriver dans certains cas que, pendant la percussion, certaines des liaisons antérieures viennent à disparaître. Si une liaison antérieure disparaît à l'instant t_0, de façon à ne donner lieu à aucune percussion de liaison, il est évident que tout se passe comme si elle n'existait pas; nous avons donc à nous occuper uniquement du cas où la liaison disparaît à l'instant θ compris entre t_0 et t_1, après avoir donné lieu à une percussion de liaison; dans ce cas, la

forme d'équations précédente est encore applicable; on opérera comme si cette liaison n'existait pas avant la percussion et comme si on l'introduisait pendant l'intervalle $t_0 t_1$; on la traitera donc de la même manière que les liaisons introduites. On obtiendra ainsi des équations en nombre insuffisant pour déterminer l'état des vitesses à l'instant t_1.

Remarque II. — Si l'on a à traiter un problème dans lequel le travail virtuel de certaines percussions de liaison n'est pas nul pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, et si, parmi tous ces déplacements, il y en a pour lesquels ce travail est nul, on pourra imaginer qu'on ait introduit des liaisons auxiliaires telles que ces déplacements soient les seuls possibles. — On traitera alors le problème dans ce cas par les équations de Lagrange qui donneront un certain nombre d'équations nécessaires, mais qui ne suffiront pas pour déterminer l'état des vitesses à l'instant t_1.

Soit, par exemple, une sphère dépolie qui vient heurter un plan sur lequel elle peut glisser avec frottement. Avant la percussion, sa position dépend de six paramètres. Les déplacements compatibles avec les liaisons introduites dépendent de cinq paramètres. Parmi ces déplacements choisissons ceux pour lesquels la vitesse du point de contact est nulle; le travail virtuel de la percussion de liaison sera nul : on sera ramené à traiter le problème dans lequel la sphère est assujettie à rouler à la fin du choc ; on introduit de cette manière trois équations de liaison, de sorte que la position du corps ne dépend que de trois paramètres. Les équations de Lagrange sont au nombre de trois et s'appliquent au problème proposé. Il restera à trouver deux ou trois équations suivant que la liaison persiste ou non après le choc. Observons que les équations trouvées sont complètement indépendantes du coefficient de frottement.

On peut remarquer que ce qui précède n'est pas sans analogie avec le principe de solidification qu'on applique en Statique.

Remarques sur les systèmes non holonomes;

PAR M. PAUL APPELL.

A la suite de l'intéressante étude de MM. Beghin et Rousseau, je développerai brièvement deux remarques relatives aux systèmes non holonomes, l'une se rapportant aux percussions, l'autre aux mouvements très lents.

1. MM. Beghin et Rousseau montrent dans le Mémoire précédent que la forme des équations de la théorie des percussions, que j'avais déduite des équations de Lagrange pour les systèmes holonomes, s'applique encore aux systèmes non holonomes, quoique les équations de Lagrange soient alors en défaut. On peut établir ce résultat par une voie analogue à celle que j'ai suivie dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1896, premier fascicule). Prenons les équations du mouvement d'un système quelconque sous la forme

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

que j'ai donnée dans le Mémoire intitulé : *Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques*, 1901, premier fascicule). Dans ces équations

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n$$

représente la somme des travaux virtuels des forces données, pour un

déplacement compatible avec les liaisons, et Δ_α des termes correctifs dépendant seulement de $q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ et du temps; ces termes correctifs étant *nuls* si le système est holonome. Mais alors, si des percussions ont lieu pendant l'intervalle très court $t_1 - t_0$, nous multiplierons les deux termes de l'équation (1) par dt et nous intégrerons de t_0 à t_1. Les intégrales de $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt$ et $\Delta_\alpha dt$ seront négligeables, car les q_α et les q'_α restent finis et les équations donneront

$$\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right)_0 = \int_{t_0}^{t_1} Q_\alpha dt.$$

Ce sont précisément, à la différence des notations près, les équations dont on peut déduire celles de MM. Beghin et Rousseau.

2. On peut faire une remarque du même genre pour l'application des équations de Lagrange aux mouvements très lents d'un système non holonome à liaisons indépendantes du temps.

Si le mouvement est très lent, les vitesses sont très petites; par conséquent, les quantités $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ restent très petites. Supposons alors qu'on néglige les carrés et les produits de ces quantités : les termes Δ_α qui figurent dans les équations (1), étant des formes quadratiques de $q'_1, q'_2, \ldots, q_n$, sont *négligeables* et les équations approchées prennent la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$

où il restera à supprimer les termes du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q_n$.

Dans ce cas, les équations de Lagrange fournissent donc des équations approchées du mouvement, quoique cette forme d'équations ne soit pas rigoureusement applicable.

Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps;

PAR M. BEGHIN.

Étant donné un système soumis à des liaisons sans frottement et ne dépendant pas du temps, si l'on introduit brusquement des liaisons également sans frottement et ne dépendant pas du temps, le théorème de Carnot s'applique et peut s'énoncer ainsi :

Si les liaisons antérieures et les liaisons brusquement introduites subsistent après les percussions, la force vive perdue est égale à la force vive que possédérait le système si chaque point était animé de la vitesse qu'il a perdue.

Nous nous proposons d'étendre ce théorème, en le modifiant, aux systèmes dans lesquels les liaisons peuvent dépendre du temps, mais sont toujours assujetties à être sans frottement.

Pour l'établir, nous reproduirons, en la modifiant, la démonstration donnée par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 1896, premier fascicule).

Soit un système holonome ou non, dépendant de h paramètres indépendants. Supposons que, pendant l'intervalle très court $t_0 t_1$, on introduise de nouvelles liaisons, les unes exprimables par des relations en termes finis pouvant dépendre de t, les autres par des relations

différentielles non intégrables pouvant contenir dt. Nous venons de montrer, M. Rousseau et moi, que les équations de Lagrange peuvent s'appliquer à ce problème de percussions. Pour plus de simplicité, nous supposerons effectué le changement de variables qu'on doit faire pour écrire ces équations; de sorte que le système dépendra avant la percussion des k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$, pendant la percussion des n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n (n < k)$, les liaisons introduites étant représentées les unes par

$$q_{n+1} = 0, \qquad q_{n+2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_{n+r} = 0,$$

les autres par

$$dq_{n+r+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad dq_k = 0.$$

Dans ces conditions, si l'on remarque que les seconds membres des équations de Lagrange sont nuls, ces équations sont

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu}\right)_1 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

La force vive $2T$ du système est une forme quadratique non homogène des variables $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, et l'on peut poser

$$2T = 2\varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + \psi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + f,$$

φ étant un polynome homogène du deuxième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; ψ un polynome homogène du premier degré, f étant indépendant de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$.

Nous nous proposons de montrer que le théorème de Carnot s'applique au problème que nous étudions, pourvu qu'on remplace la force vive $2T$ par la fonction 2φ, de sorte que le théorème sera : *La perte subie par la fonction 2φ est égale à la force vive due aux vitesses perdues.*

Si l'on désigne par $2T'$ la force vive due aux vitesses perdues, le théorème s'exprimera par la relation

$$2\varphi[(q'_1)_0, (q'_2)_0, \ldots, (q'_k)_0] - 2\varphi[(q'_1)_1, \ldots, (q_k)_1] = 2T'$$

ou, en simplifiant les notations,

$$2\mathfrak{z}_0 - 2\mathfrak{z}_1 = 2T'.$$

1° *Calcul de* $2\mathfrak{z}_0 - 2\mathfrak{z}_1$. — D'après le théorème des fonctions homogènes, on a évidemment

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{z}_0 - 2\mathfrak{z}_1 &= \sum_1^k (q'_\nu)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \sum_1^k (q'_\nu)_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_1 \\ &= \sum_1^k [(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1] \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 + \sum_1^k (q'_\nu)_1 \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_1\right]. \end{aligned}$$

Posons, comme le fait M. Appell,

$$p_\nu = (q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1$$

et remarquons que l'on a, d'après une propriété connue des formes quadratiques,

$$\sum_1^k p_\nu \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 = \sum_1^k (q'_\nu)_0 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial p_\nu}.$$

Remarquons de plus que $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial p_\nu}$ étant linéaire et homogène, on a

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial p_\nu} = \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_1.$$

On aura donc

$$(2) \qquad 2\mathfrak{z}_0 - 2\mathfrak{z}_1 = \sum_1^k [(q'_\nu)_0 + (q'_\nu)_1] \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_1\right].$$

Remarquons enfin que, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}$ et $\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}$ ne différant que par un terme indépendant de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial q'_\nu}\right)_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1$$

Mais, en se reportant aux équations (1), on voit que les différences $\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1$ sont nulles pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$; de plus comme toutes les liaisons sont persistantes, on a $(q'_\nu)_1 = 0$ pour $\nu = n+1, n+2, \ldots, k$, de sorte que la relation (2) se réduit à

$$2\varphi_0 - 2\varphi_1 = \sum_{n+1}^{k} (q'_\nu)_0 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1\right].$$

2° *Calcul de* $2T'$. — Il est facile de constater que la force vive due aux vitesses perdues $2T'$ a pour valeur $2\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

En effet, les composantes x', y', z' de la vitesse du point x, y, z ont des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} x' &= a_1 q'_1 + \ldots + a_k q'_k + a, \\ y' &= b_1 q'_1 + \ldots + b_k q'_k + b, \\ z' &= c_1 q'_1 + \ldots + c_k q'_k + c. \end{aligned}$$

La vitesse perdue a donc pour composantes

$$\begin{aligned} x'_0 - x'_1 &= a_1 p_1 + \ldots + a_k p_k, \\ y'_0 - y'_1 &= b_1 p_1 + \ldots + b_k p_k, \\ z'_0 - z'_1 &= c_1 p_1 + \ldots + c_k p_k. \end{aligned}$$

La force vive $2T'$ a pour expression

$$2T' = \sum m\left[(x'_0 - x'_1)^2 + (y'_0 - y'_1)^2 + (z_0 - z'_1)^2\right],$$

on la déduit de la force vive réelle $2T$ en supprimant dans x', y', z' les termes a, b, c et remplaçant $q'_1, \ldots, q_k$ par $p_1, p_2, \ldots, p_k$; on obtient ainsi, évidemment, $2\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$.

On peut alors écrire

$$2T' = \sum_1^k p_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial p_\nu} = \sum_1^k \left[(q'_\nu)_0 - (q'_\nu)_1\right]\left[\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)_1\right]$$

d'après une remarque précédente.

En raisonnant de la même manière que pour le calcul de $2\mathfrak{T}_0 - 2\mathfrak{T}_1$ on obtient

$$2T' = \sum_{n+1}^{k} (q_\nu)_0 \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu'} \right)_0 - \left(\frac{\partial T}{\partial q_\nu'} \right)_1 \right],$$

$2T'$ a donc bien même expression que $2\mathfrak{T}_0 - 2\mathfrak{T}_1$, et le théorème est démontré.

Remarque. — On sait que lorsqu'un système quelconque est soumis à des percussions, la perte de force vive est égale à la force vive due aux vitesses perdues diminuée de deux fois la somme des travaux des percussions, chaque point d'application étant supposé avoir une vitesse égale à sa vitesse finale. — Le théorème précédent permet d'avoir une expression de ce travail $\mathfrak{T}$, on a

$$2(T_0 - T_1) = 2T' - 2\mathfrak{T}$$

ou, en remplaçant $2T'$ par $2\mathfrak{T}_0 - 2\mathfrak{T}_1$, on a

$$2\mathfrak{T} = 2T_1 - 2\mathfrak{T}_1 - (2T_0 - 2\mathfrak{T}_0)$$

ou

$$2\mathfrak{T} = \psi_1 - \psi_0.$$

Dans le cas particulier où les percussions peuvent se réduire à une seule de direction connue, cette relation permettra de trouver sa valeur.

Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. On sait que l'on peut trouver sur une courbe algébrique une série de groupes de n points dépendant de n paramètres, et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de n variations $u_1, u_2, \ldots, u_n$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un groupe de points et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système de valeurs des u, abstraction faite des périodes. Le nombre n, comme il est classique, est égal au genre p de la courbe.

Une question analogue peut être posée pour les surfaces algébriques :

Est-il possible de trouver sur certaines surfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $2n$ paramètres, et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un seul groupe de points, et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système des u, aux périodes près?

Cette circonstance peut se présenter pour $n = 1$, et l'on a alors les surfaces hyperelliptiques. Il paraissait vraisemblable que, pour d'autres valeurs de n, on aurait des classes de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. *En réalité, il n'en existe pas;* c'est ce que je me propose de montrer ici.

2. Considérons donc la surface

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (\text{de degré } m),$$

et, en supposant n supérieur à mn, soient $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ les coordonnées de n points arbitraires de la surface. Désignons par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{2n+1},$$

$2n + 1$ fonctions rationnelles symétriques des (x, y, z), prises d'ailleurs arbitrairement, on aura une hypersurface

$$F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}) = 0,$$

dans l'espace à $2n + 1$ dimensions, et, de plus, puisque les fonctions symétriques ξ sont arbitrairement choisies, cette surface correspondra *uniformément* au groupe des n points.

D'après les hypothèses faites, les coordonnées d'un point arbitraire de la surface F s'exprimeront uniformément par des fonctions abéliennes de $2n$ variables $u_2, u_2, \ldots, u_{2n}$. La notion de genre géométrique s'étend immédiatement des surfaces de l'espace à trois dimensions aux hypersurfaces dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Notre surface F ne pourra posséder qu'une seule intégrale multiple de première espèce d'ordre $2n$, et cette intégrale correspondra à l'intégrale multiple

$$\int\int \cdots \int du_1\, du_2 \ldots du_{2n};$$

le genre géométrique de la surface F est donc égal à mn. De plus, la surface F aura $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce, dont l'inversion donnera les ξ en fonctions abéliennes des u.

A chaque intégrale de différentielle totale de première espèce de la

surface F correspond une intégrale de différentielle totale de première espèce de la surface f et inversement. Il en résulte que la surface f possédera $2n$ intégrales de différentielles totales de première espèce linéairement indépendantes

$$(1) \qquad \int P_i\,dx + Q_i\,dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$

les P et Q étant rationnelles en x, y et z; ces $2n$ intégrales auront $4n$ périodes [1]. On voit de plus aisément, à cause de la symétrie des ξ par rapport à $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, que le groupe des n points sera donné par les $2n$ équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n} P_i(x_h, y_h, z_h)\,dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h)\,dy_h = du_i \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n). \end{array} \right.$$

3. Ceci posé, montrons que la surface f ne peut être d'un genre géométrique supérieur à l'unité. Soit, en effet,

$$(\alpha) \qquad \int\int \frac{S(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

une intégrale double de première espèce de f. Formons l'intégrale multiple d'ordre $2n$

$$(3) \qquad \int\int\cdots\int \frac{S_1 S_2 \ldots S_n}{f'_{z_1} f'_{z_2} \ldots f'_{z_n}}\,dx_1\,dy_1 \ldots dx_n\,dy_n,$$

où S_i et f'_{z_i} désignent respectivement $S(x_i, y_i, z_i)$ et $f'_{z_i}(x_i, y_i, z_i)$.

---

[1] On ne sait rien de général sur la dépendance entre le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce (quand il en existe pour une surface) et le nombre de leurs périodes. On doit cependant à M. Enriques deux théorèmes particuliers fort intéressants (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III). En essayant de démontrer la proposition réciproque d'un beau théorème de M. Humbert, le savant géomètre italien arriva à ce résultat que *toute surface algébrique admettant p intégrales de différentielles totales de première espèce avec $2p$ périodes contient une série de courbes algébriques qui n'est pas renfermée dans une série linéaire de courbes du même ordre*. De plus (pour $p > 1$), *si la surface est de genre géométrique nul, elle correspond par une transformation birationnelle à un cylindre de genre p*.

On peut écrire

$$dx_1\,dy_1\ldots dx_n\,dy_n = \frac{d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{2n}}{\dfrac{D(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{2n})}{D(x_1,y_1,\ldots,y_n)}},$$

le dénominateur étant le déterminant fonctionnel de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}$ par rapport aux $2n$ variables indépendantes $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Or il est aisé de vérifier que ce déterminant fonctionnel est une fonction rationnelle et symétrique de $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$. C'est évidemment une fonction rationnelle et, pour voir qu'elle est symétrique, il suffit de remarquer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ a'_1 & a'_2 & \ldots & a'_{2n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_{2n} \\ b'_1 & b'_2 & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 & l_2 & \ldots & l_{2n} \\ l'_1 & l'_2 & \ldots & l'_{2n} \end{vmatrix},$$

où les lettres $(a, b, \ldots, l)$ sont en nombre n, ne change pas si l'on permute entre eux deux couples de lignes associées, par exemple si l'on permute les lignes (a, a') et les lignes (b, b'). On remarquera que pareille circonstance ne se présenterait pas dans le cas d'une courbe, et d'une manière plus générale dans le cas d'une fonction algébrique d'un nombre impair de variables indépendantes.

Il résulte de là que l'intégrale (3) est de la forme

$$\int\int\cdots\int \Theta\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{2n},$$

où Θ est une fonction rationnelle symétrique de $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ et, par suite, une fonction rationnelle de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n+1}$. Elle est donc une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce pour F. Si f est de genre supérieur à *un*, il est clair alors que l'on

pourra former pour l'hypersurface F plus d'une intégrale multiple d'ordre $2n$ de première espèce, ce qui est en opposition avec ce que nous avons dit plus haut.

4. Le genre géométrique de f est donc au plus égal à *un;* mais, d'autre part, il ne peut être égal à *zéro*. On démontre en effet (voir *Fonctions algébriques de deux variables*, t. I, p. 137) que si

$$\int P_i\,dx + Q_i\,dy \quad \text{et} \quad \int P_k\,dx + Q_k\,dy,$$

sont deux intégrales de différentielles totales de première espèce relatives à la surface f, on a l'identité

$$P_i Q_k - P_k Q_i = \frac{M(x, y, z)}{f_z},$$

où $M(x, y, z)$ est un polynome adjoint d'ordre $m - 4$, c'est-à-dire un polynome tel que l'intégrale double

$$\int\int \frac{M(x, y, z)}{f_z}\,dx\,dy$$

est de première espèce. Si le genre géométrique de f était nul, on aurait nécessairement

$$P_i Q_k - P_k Q_i = 0;$$

par suite, les $2n$ intégrales (1) seraient fonctions les unes des autres, et les $2n$ équations (2) ne pourraient être distinctes.

En désignant donc, comme plus haut, par (α) l'intégrale double de première espèce relative à la surface f de genre *un*, nous aurons les identités

$$P_i Q_k - P_k Q_i = A_{ik} \frac{S(x, y, z)}{f_z},$$

les A_{ik} étant des constantes qui ne sont pas toutes nulles. On peut supposer A_{ik} différent de zéro pour $i = 1$, $k = 2$; nous écrirons

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C \frac{S(x, y, z)}{f_z},$$

C étant une constante différente de zéro, et soient

$$P_2 Q_3 - P_3 Q_2 = A \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

$$P_3 Q_1 - P_1 Q_3 = B \frac{S(x, y, z)}{f'_z},$$

A et B étant deux constantes. De ces identités on conclut

$$A P_1 + B P_2 + C P_3 = 0,$$

$$A Q_1 + B Q_2 + C Q_3 = 0,$$

et ces relations sont inadmissibles, puisque les trois intégrales

$$\int P_1 \, dx + Q_1 \, dy, \quad \int P_2 \, dx + Q_2 \, dy, \quad \int P_3 \, dx + Q_3 \, dy$$

sont linéairement indépendantes. Nous arrivons donc à une contradiction, et, *par suite, on doit répondre par la négative à la question posée au n° 1.*

5. La question que nous venons de traiter soulève d'autres problèmes qu'il serait intéressant d'examiner. Il a été expressément mentionné que la série de groupes des n points devait correspondre uniformément à des fonctions abéliennes *non dégénérescentes.* On pourrait s'affranchir de cette dernière restriction. On aurait toujours la surface F et $2n$ intégrales de différentielles totales relatives à cette surface, mais qui ne seraient plus alors nécessairement de première espèce. De plus, tandis que tout à l'heure une intégrale de différentielle totale relative à F devait nécessairement, quand on remplaçait les ξ par leurs valeurs en $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, se ramener à la forme

$$\sum_{h=1}^{h=n} \int P_i(x_h, y_h, z_h) \, dx_h + Q_i(x_h, y_h, z_h) \, dy_h,$$

conséquence nécessaire de ce que l'intégrale est de première espèce,

maintenant l'intégrale transformée pourrait *a priori* être de la forme

$$\int P_1\,dx_1 + Q_1\,dy_1 + P_2\,dx_2 + Q_2\,dy_2 + \ldots + P_n\,dx_n + Q_n\,dy_n,$$

les P et Q dépendant rationnellement de l'ensemble des coordonnées $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$, on aurait là une intégrale de différentielle totale *mêlée* relative à n points *arbitraires* de la surface et symétrique par rapport à ces n points. Quoi qu'il en soit, il y a là un point à discuter, et d'une manière plus générale ces intégrales *mêlées* peuvent présenter quelque intérêt.

6. On peut encore se poser une autre question. En restant dans le cas des fonctions abéliennes non dégénérescentes, on pourrait considérer une fonction algébrique de *trois* variables indépendantes donnée par une équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

et se poser pour cette hypersurface le problème que nous avons traité pour les surfaces de l'espace à trois dimensions : existe-t-il sur certaines hypersurfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $3n$ paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $3n$ paramètres. La parité du nombre des variables indépendantes jouait un rôle important dans la démonstration qu'on a lue plus haut : ici, avec trois variables indépendantes au lieu de deux, la démonstration du théorème (à supposer qu'il soit exact) devra être assez notablement modifiée. La même question se pose pour les fonctions algébriques d'un nombre *impair* quelconque de variables indépendantes.

Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques;

PAR M. G. HUMBERT.

Le présent Mémoire a pour but d'établir certaines liaisons remarquables entre la théorie des fonctions abéliennes singulières de genre deux et la théorie arithmétique des formes quadratiques; il est divisé en trois Parties.

Dans la première, consacrée aux fonctions *simplement* singulières, c'est-à-dire à celles dont les périodes vérifient *une* relation singulière, nous montrons, en nous reportant à un résultat antérieurement établi par nous, que les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - 4yz - 4tu = \Delta,$$

se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par des formules linéaires, qui fournissent en même temps des transformations en elle-même de la forme $x^2 - 4yz - 4tu$. Ce résultat met en évidence un groupe intéressant, isomorphe au groupe abélien, et qui est intimement lié aux propriétés de la forme quadratique.

Laissant ensuite de côté les questions purement arithmétiques, nous déterminons toutes les transformations qui n'altèrent pas une relation singulière donnée, ou qui changent l'une dans l'autre deux relations

données, de même invariant; nous étendons ces formules aux transformations singulières du premier degré.

La seconde partie est consacrée aux fonctions *doublement* singulières, dont les périodes satisfont à un système de *deux* relations singulières données. Nous faisons voir qu'à chaque système de cette nature correspond une classe de formes binaires positives, proprement ou improprement équivalentes entre elles, et que cette classe ne change pas quand on opère, sur le système proposé, une transformation ordinaire quelconque de degré un.

Inversement, les systèmes qui donnent naissance à des formes d'une classe donnée sont réductibles, par des transformations ordinaires du premier degré, à un nombre fini d'entre eux, nombre égal à l'unité dans un grand nombre de cas, que nous déterminons.

Au lieu des périodes, considérons les *modules* des fonctions abéliennes : ils sont liés par une ou deux équations algébriques, selon que les fonctions sont simplement ou doublement singulières. On peut ainsi faire correspondre à toute relation singulière, ou plutôt à son invariant entier, une surface algébrique; à toute classe de formes binaires positives, on fera de même correspondre une ou plusieurs courbes algébriques, dont les propriétés refléteront celles de la classe. Par exemple, si une classe représente un nombre, la surface dont ce nombre est l'invariant contient les courbes qui répondent à la classe, et réciproquement : les propriétés de cette Géométrie des nombres et des formes sont étudiées et développées.

On détermine les groupes fuchsiens des courbes algébriques ainsi introduites; on établit qu'ils reviennent à des groupes découverts par M. Poincaré, et rattachés par lui aux transformations en elle-même d'une forme quadratique ternaire indéfinie.

Cette recherche montre que, dans des cas très étendus, les courbes qui répondent à des classes de même déterminant et de même genre arithmétique ont le même genre géométrique et se correspondent point par point; de là résulte une liaison bien inattendue entre les deux notions si dissemblables de genre, en Arithmétique et en Géométrie.

On fait voir ensuite que la correspondance univoque entre les courbes qui répondent à des classes du même genre est réalisée par des *trans-*

formations singulières du premier degré, et l'on met en évidence le lien qui unit la théorie de ces transformations à celle des formes quadratiques ternaires.

Enfin, dans un ordre d'idées analogue à celui de la première Partie, on montre comment les résultats obtenus se rattachent à la représentation d'une forme binaire positive par la forme $x^2 - 4yz - 4tu$, déjà rencontrée précédemment.

La troisième Partie concernera les fonctions triplement singulières: elle paraîtra ultérieurement et sera précédée d'un résumé spécial.

PREMIÈRE PARTIE.

Fonctions abéliennes simplement singulières.

---

1. Si les périodes normales d'une fonction abélienne $F(u, v)$ vérifient *une* seule relation singulière, c'est-à-dire une relation du type

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, B, C, D, E sont des entiers sans diviseur commun, j'ai établi (t. V, 5e série de ce *Journal*, p. 234 et suivantes) qu'une transformation ordinaire du premier ordre change cette relation en une relation analogue

$$(2) \qquad A_1G + B_1H + C_1G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

et que la quantité, *essentiellement positive*, $B^2 - 4AC - 4DE$, est égale à $B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1$: cette quantité, que j'ai désignée par Δ, est donc un invariant.

L'expression des A_1, B_1, ..., en fonction des A, B, ..., et des seize entiers caractéristiques de la transformation employée est la suivante (*ibid.*, p. 236) :

$$(3)\quad \begin{cases} A_1 = A(db)_{31} + B\ (ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31}, \\ B_1 = 2A(db)_{03} + B[2(ad)_{03} - n] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03}, \\ C_1 = A(db)_{02} + B\ (ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02}, \\ D_1 = A(db)_{23} + B\ (ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23}, \\ E_1 = A(db)_{01} + B\ (ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}. \end{cases}$$

Dans ces formules, $(ab)_{ij}$ désigne $a_i b_j - a_j b_i$, et les seize entiers a_i, b_i, c_i, d_i sont liés par les six relations classiques d'Hermite pour la transformation d'ordre $n = 1$; on dit aussi que ce sont les coefficients d'une substitution abélienne à quatre variables.

Inversement, j'ai montré (*ibid.*, p. 246) que, si deux systèmes d'entiers, A, B, C, D, E et A_1, ..., E_1, sans diviseur commun dans chaque système, vérifient l'équation

$$(4)\qquad B^2 - 4AC - 4DE = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1,$$

les deux relations singulières (1) et (2) sont réductibles l'une à l'autre par une transformation d'ordre 1, c'est-à-dire que A_1, B_1, ..., E_1 s'expriment, en fonction de A, B, ..., E, par des équations du type (3).

2. Si nous employons le langage de la théorie des formes arithmétiques, ces résultats s'énoncent ainsi :

1° *Toutes les représentations propres d'un nombre positif* Δ, *par la forme à cinq variables* $X^2 - 4YZ - 4TU$, *se déduisent de l'une quelconque d'entre elles* [1], x, y, z, t, u, *par les formules* (3),

---

[1] Il est aisé d'obtenir immédiatement une solution propre de l'équation $\Delta = x^2 - 4yz - 4tu$; par exemple, si $\Delta = 4N$, on prendra $x = t = u = 0$; $y = N$, $z = -1$; si $\Delta = 4N + 1$, on prendra $t = u = 0$, $x = z = -1$, $y = N$.

c'est-à-dire

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} X = x[2(ad)_{03} - n] + 2y(db)_{03} + 2z(ac)_{03} + 2t(cd)_{03} + 2u(ab)_{03}, \\ Y = x\ (ad)_{31} + y(db)_{31} + z(ac)_{31} + t(cd)_{31} + u(ab)_{31}, \\ Z = x\ (ad)_{02} + y(db)_{02} + z(ac)_{02} + t(cd)_{02} + u(ab)_{02}, \\ T = x\ (ad)_{23} + y(db)_{23} + z(ac)_{23} + t(cd)_{23} + u(ab)_{23}, \\ U = x\ (ad)_{01} + y(db)_{01} + z(ac)_{01} + t(cd)_{01} + u(ab)_{01}; \end{array}\right.$$

où les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers caractéristiques d'une transformation ordinaire du premier degré ($n = \pm 1$) [1].

2° *Les mêmes formules* (5) *donnent des transformations arithmétiques en elle-même de la forme à cinq variables $x^2 - 4yz - 4tu$* : cela résulte en effet immédiatement de la propriété d'invariance traduite par l'équation (4).

De plus les substitutions (5) forment un groupe, que je dis être *isomorphe au groupe abélien,* qui répond aux transformations du premier degré d'Hermite. Ce dernier groupe, en effet, est celui des substitutions quaternaires

$$(8)\quad \left|\begin{array}{ll} x_0 & a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ x_1 & b_0x_0 + b_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_2 & c_0x_0 + c_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_3 & d_0x_0 + d_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|,$$

les entiers a_i, b_i, c_i, d_i vérifiant les relations classiques (où $n = \pm 1$) :

$$\begin{array}{l} (ab)_{03} + (ab)_{12} = (ac)_{03} + (ac)_{12} \\ = (bd)_{03} + (bd)_{12} = (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0 \\ (ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} + (bc)_{12} = n, \end{array}$$

[1] Nous écrivons $n = \pm 1$ au lieu de $n + 1$, pour comprendre, dans nos formules, les transformations d'ordre -1, qui s'obtiennent en combinant, avec les transformations habituelles d'ordre an, celle qui change g, h, g'

A la substitution $S(a_i, b_i, c_i, d_i)$ répond la transformation du premier ordre T, d'entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i; au produit de deux substitutions S et S', répond le produit TT' des transformations correspondantes : cela résulte des propriétés générales de la transformation.

Cela posé, soient Σ et Σ' les substitutions (3) qui répondent à T et à T' : effectuer sur les périodes singulières la transformation T, puis la transformation T', c'est opérer sur les A, B, C, D, E la substitution Σ, puis la substitution Σ', c'est-à-dire la substitution $\Sigma\Sigma'$; en d'autres termes, $\Sigma\Sigma'$ répond à TT', et par suite à SS', ce qui établit la proposition.

Le groupe abélien se trouve donc lié d'une manière très étroite aux substitutions semblables de la forme $x^2 - 4yz - 4tu$, et à la représentation d'un nombre par cette forme.

5. *Application.* — Soit à décomposer en cinq carrés, dont trois positifs et deux négatifs, un nombre positif Δ, de l'un des types $4N$ et $4N+1$, c'est-à-dire à représenter Δ par la forme

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \tau^2 - \upsilon^2.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur Δ, un des entiers ξ, η, ζ aura la parité de τ et un autre aura celle de υ; si donc η et ζ sont les deux entiers ainsi fixés, on pourra poser

$$\eta + \tau = 2Y, \qquad \zeta + \upsilon = 2T,$$
$$-\eta + \tau = 2Z, \qquad -\zeta + \upsilon = 2U,$$

---

en $-G$, $-H$, $-G'$ et dont les entiers caractéristiques sont nuls, sauf

$$a_0 = b_1 = 1, \qquad c_2 = d_3 = -1.$$

Pour ces transformations, la quantité $B^2 - 4AC - 4DE$ est aussi invariante, ce qui justifie nos énoncés généraux.

Les transformations d'*ordre* ± 1 sont les transformations (ordinaires) de *degré* 1.

et l'on aura

$$\Delta = \xi^2 - 4YZ - 4TU,$$

équations dont les solutions propres se déduisent de l'une d'elles à l'aide des formules (5).

Ainsi, le problème de la décomposition d'un nombre positif, $4N$ ou $4N + 1$, en cinq carrés, dont trois positifs et deux négatifs, se ramène à la détermination de toutes les substitutions du groupe abélien à quatre variables, c'est-à-dire de toutes les transformations ordinaires du premier degré pour les fonctions abéliennes de genre *deux*.

4. *Remarque.* — Pour compléter ces résultats, il resterait à voir dans quel cas deux substitutions (5), répondant à des valeurs différentes des a_i, b_i, c_i, d_i, donnent, pour un même système de valeurs de x, y, z, t, u, un même système de valeurs de X, Y, Z, T, U.

En d'autres termes, étant donnée une relation singulière (1),

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

dans quel cas deux transformations différentes du premier degré, T et T', la changeront-elles en une *même* relation singulière : ou, plus exactement, en deux relations singulières ayant les mêmes coefficients? S'il en est ainsi, la transformation du premier ordre TT'^{-1} change évidemment la relation (1) en une relation singulière de mêmes coefficients A, B, ..., E; le problème est donc ramené à la détermination de toutes les transformations du premier degré qui n'altèrent pas une relation singulière donnée; nous allons effectuer cette détermination, qui jouera un rôle important dans la suite du Mémoire.

Transformations n'altérant pas une relation singulière.

5. *Transformations ordinaires.* — Soit la relation singulière

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

faisons subir aux périodes une transformation *ordinaire*, d'ordre

quelconque n; les périodes transformées G, H, G′ sont liées à g, h, g' par les relations d'Hermite :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01}+(db)_{31}G+2(db)_{03}H+(db)_{02}G'+(db)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\
h &= \frac{(ad)_{01}+(ad)_{31}G+[2(ad)_{03}-n]H+(ad)_{02}G'+(ad)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\
g' &= \frac{(ac)_{01}+(ac)_{31}G+2(ac)_{03}H+(ac)_{02}G'+(ac)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')},\\
h^2-gg' &= \frac{(cd)_{01}+(cd)_{31}G+2(cd)_{03}H+(cd)_{02}G'+(cd)_{23}(H^2-GG')}{(ab)_{01}+(ab)_{31}G+2(ab)_{03}H+(ab)_{02}G'+(ab)_{23}(H^2-GG')}.
\end{aligned}\right.$$

Les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules : les a_i, b_i, c_i, d_i sont les seize entiers caractéristiques d'une transformation d'ordre n, et $(ab)_{ij}$ désigne toujours $a_ib_j-a_jb_i$: ces quantités doivent vérifier les relations

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
(ab)_{03}+(ab)_{12}=(ac)_{03}+(ac)_{12}&=(bd)_{03}+(bd)_{12}\\
&=(cd)_{03}+(cd)_{12}=0,\\
(ad)_{03}+(ad)_{12}&=(bc)_{03}+(bc)_{12}=n.
\end{aligned}\right.$$

Inversement, des équations (6) on tire G, H, G′ et H^2-GG' en fonction de g, h, g' :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
G &= \frac{(cd)_{02}+(ac)_{02}g+2(bc)_{02}h+(db)_{02}g'+(ab)_{02}(h^2-gg')}{(cd)_{23}+(ac)_{23}g+2(bc)_{23}h+(db)_{23}g'+(ab)_{23}(h^2-gg')},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

En vertu de (6), la relation singulière (1) en g, h, g' se transforme en une relation singulière en G, H, G′ : cherchons quels doivent être les a_i, b_i, c_i, d_i pour que celle-ci soit identique à la première (à un facteur constant près). La méthode la plus naturelle serait d'exprimer que les coefficients A_1, B_1, ..., E_1, de la relation en G, H, G′ sont proportionnels à A, B, ..., E; c'est celle qu'a suivie M. Bourget [1],

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XII.

quand il a déterminé les transformations d'ordre 1 qui font revenir sur elle-même la relation $h^2 - gg' - P = 0$, mais elle conduirait, dans le cas général, à des calculs inextricables. Il sera beaucoup plus simple de raisonner comme il suit.

6. Regardons g, h, g' et G, H, G' comme les coordonnées cartésiennes de deux points dans deux espaces (e) et (E) : en vertu des relations (6) et (8), ces deux espaces se correspondent point par point, lorsque les a_i, b_i, c_i, d_i sont donnés; de plus, toute quadrique q de (e), passant par la conique à l'infini sur le cône $h^2 - gg' = 0$, se transforme en une quadrique Q, de (E), passant par la conique à l'infini sur le cône $H^2 - GG' = 0$, et réciproquement. Il résulte immédiatement de là que toute droite de l'espace (e) rencontrant la première conique se transforme en une droite de l'espace (E), rencontrant la deuxième, et, par suite, que toute génératrice rectiligne de la quadrique q se transforme en une génératrice rectiligne de la quadrique Q : aux génératrices d'un même système de q correspondent, naturellement, les génératrices d'un même système de Q.

7. Cela posé, nous ne nous servirons plus des relations (6); nous utiliserons celles qui se présentent tout d'abord, entre g, h, g' et G, H, G', dans la théorie de la transformation.

Soient U et V les variables pour lesquelles les périodes normales sont $(1, 0)$, $(0, 1)$, (G, H), (H, G'), et u, v celles qui ont pour périodes $(1, 0)$, $(0, 1)$, (g, h), (h, g'); on pose, dans la théorie de la transformation,

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

les λ, μ étant des constantes, et l'on exprime que U et V augmentent d'une de leurs périodes quand u et v augmentent d'une des leurs, ce qui donne, en désignant par a_i, b_i, c_i, d_i les entiers caractéristiques de la transformation,

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} \lambda = a_0 + a_3 G + a_2 H, & \mu = b_0 + b_3 G + b_2 H, \\ \lambda' = a_1 + a_3 H + a_2 G, & \mu' = b_1 + b_3 H + b_2 G, \\ \lambda g + \mu h = d_0 + d_3 G + d_2 H, & \lambda h + \mu g' = c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ \lambda' g + \mu h = d_1 + d_3 H + d_2 G, & \lambda h + \mu g = c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{array}\right.$$

L'élimination de λ, μ, λ', μ' conduit aux relations

$$(10)\quad \begin{cases} g(a_0 + a_3 G + a_2 H) - h(b_0 + b_3 G + b_2 H) = d_0 - d_3 G + d_2 H, \\ g(a_1 - a_3 H + a_2 G') + h(b_1 + b_3 H + b_2 G') = d_1 - d_3 H + d_2 G'. \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} h(a_0 + a_3 G + a_2 H) + g'(b_0 + b_3 G + b_2 H) = c_0 + c_3 G + c_2 H, \\ h(a_1 + a_3 H + a_2 G') + g'(b_1 - b_3 H + b_2 G') = c_1 + c_3 H + c_2 G'. \end{cases}$$

Considérons maintenant la quadrique (en g, h, g') de l'espace (e), représentée par la relation singulière (1),

$$(1)\qquad A g + B h + C g' + D(h^2 - g g') + E = 0;$$

elle admet, comme génératrices rectilignes de systèmes différents les deux droites

$$(12)\qquad g = \frac{C}{D}, \quad h = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2D} \quad \text{et} \quad g = \frac{C}{D}, \quad h = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2D},$$

Δ désignant l'invariant $B^2 - 4AC - 4DE$. Cela suppose $D \gtrless 0$; nous admettrons de plus que Δ *n'est pas carré parfait*, c'est-à-dire que l'on est en dehors du *cas elliptique* [1].

Si maintenant la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) change la relation singulière (1) en une relation identique (en G, H, G'), les deux génératrices rectilignes (12) auront pour transformées respectives deux génératrices rectilignes, de système différent, de la quadrique

$$(1\ bis)\qquad A G + B H + C G' + D(H^2 - G G') + E = 0.$$

Or, en faisant $g = \frac{C}{D}$, $h = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2D}$ dans la première des équations (10), on obtient la relation

$$(13)\quad \begin{cases} C(a_0 + a_3 G + a_2 H) + \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2}(b_0 + b_3 G + b_2 H) \\ \quad = D(d_0 + d_3 G + d_2 H). \end{cases}$$

---

[1] Ce journal, 5e série, t. V, p. 247.

qui représente, en G, H, G′, un plan parallèle à l'axe $G = 0$, $H = 0$; ce plan, en vertu de ce qui précède, doit couper, suivant deux génératrices, la quadrique $AG + BH + CG + D(H^2 - GG') + E = 0$: dès lors, il contiendra nécessairement une des deux génératrices de cette surface, $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ($\varepsilon$ désignant ± 1), *qui lui sont parallèles*. En d'autres termes, l'équation (13) doit être satisfaite pour $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ce qui donne

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &C\left(a_0 + a_3\frac{C}{D} + a_2\frac{-B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right) + \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2}\left(b_0 + b_3\frac{C}{D} + b_2\frac{-B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right) \\ &\qquad = D\left(d_0 + d_3\frac{C}{D} + d_2\frac{-B + \varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}\right). \end{aligned}\right.$$

On en conclut, en égalant séparément dans les deux membres les coefficients de $\sqrt{\Delta}$ et les parties rationnelles,

$$(15)\qquad Dd_2 = Ca_2 + \varepsilon Db_0 + \varepsilon Cb_3 - \frac{B}{2}(1 + \varepsilon)b_2,$$

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &CDa_0 + C^2a_3 - \tfrac{1}{2}BCa_2 - \tfrac{1}{2}B\left(Db_0 - Cb_3 - \tfrac{1}{2}Bb_2\right) \\ &\qquad + \tfrac{\varepsilon}{4}(B^2 - 4AC - 4DE)b_2 = D^2d_0 + CDd_1 - \frac{BD}{2}d_2. \end{aligned}\right.$$

De même, en faisant dans la seconde relation (10) $g = \frac{C}{D}$, $h = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2D}$, on obtient, en G, H, G′, l'équation d'un plan parallèle à l'axe $G' = 0$, $H = 0$, plan qui doit couper, suivant deux génératrices, la quadrique (1 *bis*) $AG + BH + \ldots + E = 0$; comme il est parallèle aux deux génératrices de cette quadrique qui ont pour équations

$$G' = \frac{C}{D}, \qquad H = \frac{-B + \varepsilon'\sqrt{\Delta}}{2D} \qquad (\varepsilon' = \pm 1),$$

il doit contenir l'une d'elles : ce sera celle qui est du même système

que la génératrice $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, c'est-à-dire celle qui répond à $\varepsilon' = -\varepsilon$. On a donc, en portant dans la seconde équation (10) les valeurs indiquées de g, h, G', H, et en séparant les parties rationnelle et irrationnelle,

$$(17)\qquad Dd_3 = Ca_3 - \varepsilon Db_1 - \varepsilon Ab_2 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)b_3,$$

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &CDa_1 + ACa_2 - \tfrac{1}{2}BCa_3 - \tfrac{1}{2}B\left(Db_1 + Ab_2 - \tfrac{1}{2}Bb_3\right)\\ &\quad - \tfrac{\varepsilon}{4}(B^2 - 4AC - 4DE)b_3 = D^2d_1 + ADd_2 - \frac{BD}{2}d_3.\end{aligned}\right.$$

Les quatre relations (15), (16), (17) et (18) fournissent les valeurs des d_i en fonction des a_i et b_i sous la forme

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} Dd_0 &= Ca_0 + \varepsilon Cb_1 - \varepsilon Eb_2 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)b_0\\ Dd_1 &= Ca_1 - \varepsilon Ab_0 + \varepsilon Eb_3 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)b_1\\ Dd_2 &= Ca_2 + \varepsilon Cb_3 + \varepsilon Db_0 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)b_2\\ Dd_3 &= Ca_3 - \varepsilon Ab_2 - \varepsilon Db_1 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)b_3\end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On calculera les c_i d'une manière analogue : à la génératrice rectiligne $g' = \frac{A}{D}$, $h = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2D}$, qui est du même système que la première des génératrices (12), doit correspondre une génératrice rectiligne en G, H, G'. Or, si l'on remplace g' et h par les valeurs précédentes dans la première des équations (11), on obtient, en G, H, G, un plan, parallèle à l'axe $G = 0$, $H = 0$, qui doit dès lors, comme on s'en rend compte aisément, contenir la droite $G = \frac{C}{D}$, $H = \frac{-B+\varepsilon\sqrt{\Delta}}{2D}$, ε étant le même que précédemment.

On raisonnera d'une manière analogue sur la seconde équation (11),

et l'on obtiendra finalement les valeurs suivantes des c_i :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
Dc_0 &= Ab_0 - \varepsilon Ca_1 + \varepsilon Ea_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0,\\
Dc_1 &= Ab_1 + \varepsilon Aa_0 - \varepsilon Ea_3 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1,\\
Dc_2 &= Ab_2 - \varepsilon Ca_3 - \varepsilon Da_0 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2,\\
Dc_3 &= Ab_3 + \varepsilon Aa_2 + \varepsilon Da_1 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3.
\end{aligned}\right.$$

8. *Réciproquement*, cherchons si les conditions (19) et (20), qui sont nécessaires, sont suffisantes.

En premier lieu, les a_i, b_i, c_i, d_i doivent vérifier les relations (7); en y substituant aux c_i et d_i leurs valeurs (19) et (20), ces relations se réduisent aux deux suivantes :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0,\\
&-A(ab)_{02} + B(ab)_{03} - C(ab)_{31} - D(ab)_{01} + E(ab)_{32} = \varepsilon Du,
\end{aligned}\right.$$

dont la première est générale pour toutes les transformations ordinaires.

En second lieu, il s'agit de voir si la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i), dont les entiers caractéristiques vérifient (19), (20) et (21), change en elle-même la relation

$$(1)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0;$$

c'est ce qu'on vérifie sans difficulté en remplaçant, dans cette relation, g, h, g' et $h^2 - gg'$ par leurs valeurs (6) en G, H, G', $H^2 - GG'$, et chassant le dénominateur commun : on trouve ainsi que la relation (1) se reproduit, son premier membre étant multiplié par $-u\varepsilon$.

Il résulte de là que, pour toutes les transformations ordinaires d'ordre u qui n'altèrent pas la relation

$$(1)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i ne sont assujettis qu'aux conditions (19), (20) et (21).

Nous trouvons ainsi, en faisant successivement dans nos formules $\varepsilon = -1$ et $\varepsilon = +1$, deux espèces de transformations d'ordre u résolvant le problème : nous dirons qu'une de ces transformations est *propre* ou *impropre*, selon qu'elle répond à $\varepsilon = -1$ ou à $\varepsilon = +1$.

D'après ce qui vient d'être dit, une transformation propre reproduit la relation (1), en multipliant son premier membre par le facteur $+u$; pour une transformation impropre, le facteur serait $-u$.

9. *Autre expression des c_i et d_i.* — Les relations (19) et (20), qui donnent les c_i et d_i en fonction des a_i et b_i ne fournissent pas immédiatement ces quantités sous forme entière, à cause du facteur D qui figure dans leurs premiers membres. Il est aisé de remédier à cet inconvénient.

Supposons, par exemple, que les coefficients A et D soient premiers entre eux, et désignons par p et q deux entiers, choisis arbitrairement et vérifiant la relation

$$\text{(22)} \qquad Ap + Dq = 1.$$

La première des relations (20) s'écrit, en utilisant (22),

$$Dc_0 = Ab_0 + \left[-\varepsilon Ca_1 + \varepsilon Ea_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0\right](Ap + Dq);$$

comme A et D sont premiers entre eux, le coefficient de A, dans le second membre, doit être divisible par D, ce qui donne, en désignant par θ un entier, les deux équations :

$$\text{(23)} \qquad \left\{\begin{aligned} c_0 &= \theta A + q\left[-\varepsilon Ca_1 + \varepsilon Ea_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0\right],\\ b_0 &= \theta D - p\left[-\varepsilon Ca_1 + \varepsilon Ea_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0\right].\end{aligned}\right.$$

De même, en désignant par τ, σ et ρ des entiers, les trois dernières

relations (20) fournissent les équations

$$(24)\quad \begin{cases} c_1 = \tau A + q\left[\varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1\right], \\ b_1 = \tau D - \varepsilon a_0 + p\left[\varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1\right], \\ c_2 = \sigma A - \varepsilon a_0 - q\left[\varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2\right], \\ b_2 = \sigma D + p\left[\varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2\right]. \\ c_3 = \rho A + \varepsilon a_1 - q\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3, \\ b_3 = \rho D - \varepsilon a_2 + p\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3. \end{cases}$$

On a ainsi les expressions, sous forme entière, des b_i et c_i en fonction des a_i et des entiers θ, τ, σ, ρ; pour obtenir les d_i, il suffit de porter, dans (19), les valeurs ci-dessus des b_i, et l'on trouve, en tenant compte dans les calculs de la relation $Ap + Dq = 1$,

$$(25)\quad \begin{cases} d_0 = \varepsilon\tau C - \varepsilon\sigma E - \theta\frac{B}{2}(1-\varepsilon), \\ d_1 = qCa_1 - qEa_2 - \varepsilon\theta A + \varepsilon\rho E + \varepsilon q\frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0, \\ d_2 = \varepsilon\theta D + pCa_1 - pEa_2 + \varepsilon\rho C + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)[\varepsilon p a_0 - \sigma], \\ d_3 = a_0 - \varepsilon\sigma A - \varepsilon\tau D + qCa_3 - pEa_3 \\ \qquad\qquad + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)[-\rho - \varepsilon q a_2 - \varepsilon p a_1]. \end{cases}$$

Les équations (21) deviennent, si l'on y remplace les b_i par leurs valeurs précédentes,

$$(26)\quad \begin{cases} \rho a_0 - \theta a_3 + \sigma a_1 - \tau a_2 = 0, \\ a_0^2 + Cpa_1^2 + Eqa_2^2 + Bpa_0a_1 \\ \quad + (Cq - Ep)a_0a_3 - Bqa_0a_2 - (Cq + Ep)a_1a_2 \\ \quad + \varepsilon[A(\theta a_2 - \sigma a_0) + B(\rho a_0 - \theta a_3) + C(\rho a_1 - \tau a_3)] \\ \qquad\qquad + \varepsilon D(\theta a_1 - \tau a_0) + E(\sigma a_3 - \rho a_2)] = u. \end{cases}$$

Finalement, toutes les transformations ordinaires d'ordre n qui n'altèrent pas la relation singulière

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A et D sont premiers entre eux, ont leurs entiers caractéristiques b_i, c_i, d_i exprimés par les formules (23), (24) et (25), en fonction des a_i et de quatre entiers ρ, θ, σ, τ, liés aux a_i par les relations (26) : dans ces formules, p et q sont des entiers, formant une solution de l'équation $Ap + Dq = 1$.

10. *Cas particuliers.* — La relation singulière donnée peut toujours se ramener, par une transformation d'ordre 1, comme je l'ai établi ailleurs [1], à l'une des formes

$$h^2 - gg' \qquad = P,$$
$$h^2 - gg' + h = P,$$

selon que son coefficient B est pair ou impair. On a alors $D = 1$, et les formules (19) et (20) donnent, sous forme entière, les c_i, d_i en fonction des a_i, b_i. On trouve ainsi :

1° *Transformations ordinaires d'ordre n n'altérant pas*

$$h^2 - gg' - P = 0.$$

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{ll} c_0 = -\varepsilon P a_2, & d_0 = \varepsilon P b_2 \\ c_1 = \varepsilon P a_3, & d_1 = -\varepsilon P b_3 \\ c_2 = -\varepsilon a_0, & d_2 = \varepsilon b_0 \\ c_3 = \varepsilon a_1, & d_3 = -\varepsilon b_1 \end{array}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les a_i et b_i étant liés uniquement par les relations (21), à savoir :

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 b_3 - a_3 b_0 + \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 - P(a_2 b_3 - a_3 b_2) = -n\varepsilon. \end{array}\right.$$

---

[1] Ce Journal, 5e série, t. V, p. 245.

Ces formules coïncident avec celles qu'a données M. Bourget dans le cas de $n = 1$.

Les transformations *propres* répondent à $\varepsilon = -1$; dans le cas particulier de $n = 1$, elles changent la relation $h^2 - gg' - P = 0$ en $H^2 - GG' - P = 0$; les transformations impropres ($\varepsilon = +1$) la changent en $-(H^2 - GG' - P) = 0$: on le voit de suite en remplaçant $h^2 - gg'$ par sa valeur (6) et en chassant le dénominateur.

Il résulte de là que le produit de deux transformations (27) d'ordre nn et de même espèce est une transformation (27) propre du même ordre; le produit de deux transformations (27) d'espèces différentes est une transformation (27) *impropre*.

2° *Transformations ordinaires d'ordre n n'altérant pas*

$$h^2 - gg' + h - P = 0.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned}
c_0 &= -\varepsilon P a_2 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)a_0\\
c_1 &= \quad\varepsilon P a_3 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)a_1\\
c_2 &= -\varepsilon\ \ a_0 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)a_2\\
c_3 &= \quad\varepsilon\ \ a_1 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)a_3\\
d_0 &= \quad\varepsilon P b_2 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)b_0\\
d_1 &= -\varepsilon P b_3 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)b_1\\
d_2 &= \quad\varepsilon\ \ b_0 - \tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)b_2\\
d_3 &= -\varepsilon\ \ b_1 - \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)b_3
\end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

les a_i et b_i étant liés uniquement par les relations (21), à savoir :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_0 b_3 - a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,\\
&-a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_0 b_1 - a_1 b_0 - P(a_2 b_0 - a_3 b_2) = n\varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

11. *Cas où* D *est nul.* — Les formules précédentes supposent $D \gtrless 0$; si D est nul, c'est-à-dire si la relation singulière proposée est du type

$$Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

on opère sur elle une transformation *particulière* d'ordre un, T, de manière à la changer en une relation pour laquelle D ne soit pas nul; si S est une transformation quelconque laissant celle-ci inaltérée, la transformation TST^{-1} n'altérera pas la relation proposée, et réciproquement. On obtiendra donc par ce procédé toutes les transformations de la proposée en elle-même. Voici le résultat, en supposant $A \gtrless 0$.

Les b_i et d_i sont donnés, en fonction des a_i et c_i, par les relations :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned}
Ab_0 &= \varepsilon C a_1 - \varepsilon E a_2 + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_0,\\
Ab_1 &= -\varepsilon A a_0 + \varepsilon E a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_1,\\
Ab_2 &= \varepsilon C a_3 + \frac{B}{2}(1-\varepsilon)a_2,\\
Ab_3 &= -\varepsilon A a_2 + \frac{B}{2}(1+\varepsilon)a_3;\\
Ad_0 &= \varepsilon C c_1 - \varepsilon E c_2 + \varepsilon E a_0 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)c_0,\\
Ad_1 &= -\varepsilon A c_0 + \varepsilon E c_3 + \varepsilon E a_1 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)c_1,\\
Ad_2 &= \varepsilon C c_3 + \varepsilon E a_2 - \frac{B}{2}(1+\varepsilon)c_2,\\
Ad_3 &= -\varepsilon A c_2 + \varepsilon E a_3 - \frac{B}{2}(1-\varepsilon)c_3.
\end{aligned}\right.$$

Quant aux a_i et aux c_i, ils sont liés par les deux relations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned}
&(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,\\
&-A(ac)_{02} + B(ac)_{03} + C(ac)_{13} - E(ac)_{23} = \varepsilon A n.
\end{aligned}\right.$$

En particulier, si $A = 1$, les relations (31) donnent les b_i et d_i sous forme entière.

12. *Transformations singulières.* — Cherchons de même les transformations singulières [1] qui n'altèrent pas la relation

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

supposée la *seule* relation singulière entre les périodes.

En ce cas, les relations qui donnent g, h, g', $h^2 - gg'$ en fonction de G, H, G', $H^2 - GG'$, ou inversement, gardent [2] une forme analogue à celle des relations (6) et (8); les relations (9) subsistent également. Il en résulte que les raisonnements des n^{os} **6-8** sont encore applicables, et, par suite, que les d_i et c_i sont toujours donnés en fonction des a_i et b_i par les équations (19) et (20). Seulement entre les a_i, b_i on n'a plus les relations (21), qui découlaient des relations (7), caractéristiques d'une transformation ordinaire. Celles-ci, pour une transformation singulière d'indices l et k, sont remplacées par les suivantes [3] :

$$\begin{aligned}
&(ac)_{03} + (ac)_{12} = Ak, && (db)_{03} + (db)_{12} = Ck,\\
&(ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk, && (cd)_{03} + (cd)_{12} = Ek,\\
&(ad)_{03} + (ad)_{12} = l, && (bc)_{03} + (bc)_{12} = l + Bk.
\end{aligned}$$

En tenant compte de (19) et de (20), on réduit ce système à deux équations seulement :

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned}
&(ab)_{03} + (ab)_{12} = Dk,\\
&-A(ab)_{02} + B(ab)_{03} - C(ab)_{31}\\
&\qquad - D(ab)_{01} + E(ab)_{32} = Dl\varepsilon + \frac{B\varepsilon}{2}(1+\varepsilon)Dk.
\end{aligned} \right.$$

Finalement, les formules (19), (20) et (33) fournissent toutes les transformations singulières, d'indices l et k, n'altérant pas la relation (1), supposée la seule singulière entre les périodes g, h, g'.

---

(1) *Voir* le *Journal de Math.*, 5e série, t. VI, p. 281 et suivantes.
(2) *Ibid.*, p. 284.
(3) *Ibid.*, p. 283 et 286.

On peut en déduire des formules analogues à (23), (24) et (25), donnant les b_i, c_i, d_i en fonction des a_i et de quatre entiers, liés entre eux par deux relations.

15. Bornons-nous, dans cette voie, à indiquer les résultats pour les *transformations singulières de degré* 1.

Il résulte de nos recherches antérieures qu'une transformation singulière de degré 1, relative aux fonctions abéliennes dont les périodes vérifient la relation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

est déterminée (à une transformation ordinaire près d'ordre 1) quand on se donne ses indices, l et k, c'est-à-dire deux nombres entiers satisfaisant à l'équation de Pell

$$(2l + Bk)^2 - k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = 4.$$

On trouverait, par les formules (19), (20) et (33), deux espèces de transformations singulières d'indices l et k; il suffit de connaître *une* de celles qui répondent à $\varepsilon = -1$, car les autres transformations de mêmes indices, répondant soit à $\varepsilon = -1$, soit à $\varepsilon = +1$, s'obtiennent en faisant précéder la première d'une transformation ordinaire quelconque de degré un.

Or, les formules (19), (20), ou mieux les formules (23), (24), (25), où l'on fait

$$\theta = 0, \qquad a_0 = 1, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

donnent la solution suivante :

$$(34) \qquad \begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = 1 + \tau D, \\ c_0 = 0, & c_1 = \tau A, \\ d_0 = -\tau C + \sigma E, & d_1 = -\rho E, \end{cases}$$

$$(34)\quad \begin{cases} a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_2 = \sigma D, & b_3 = \rho D, \\ c_2 = 1 + \sigma A, & c_3 = \rho A, \\ d_2 = -\rho C, & d_3 = 1 + \sigma A - \rho B + \tau D, \end{cases}$$

en supposant A et D premiers entre eux; et l'on a, d'après (33),

$$\rho = k, \qquad 1 + \sigma A - kB + \tau D = l.$$

Nous avons d'ailleurs établi (*loc. cit.*) que toutes les transformations singulières du premier degré sont (à une transformation ordinaire près d'ordre 1) les puissances, positives ou négatives, de celles dont les indices l et k forment [1] la plus petite solution entière de l'équation de Pell :

$$(2l + Bk)^2 - k^2(B^2 - 4AC - 4DE) = 4.$$

En particulier les transformations singulières de degré 1, correspondant à la relation $h^2 - gg' - P = 0$, sont des puissances de celle (d'indices l et k) que définissent les formules (34) :

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\ b_0 = 0, & b_1 = l, & b_2 = 0, & b_3 = k, \\ c_0 = 0, & c_1 = 0, & c_2 = 1, & c_3 = 0, \\ d_0 = 0, & d_1 = Pk, & d_2 = 0, & d_3 = l; \end{array}$$

l et k désignent ici la plus petite solution positive de l'équation

$$l^2 - Pk^2 = 1.$$

La transformation précédente n'altère pas la relation $h^2 - gg' - P = 0$: plus exactement, en vertu des formules générales de la transformation singulière (ce Journal, 5e série, t. VI, p. 284), elle change cette relation en $l(H^2 - GG' - P) = 0$.

[1] *Ibid.*, p. 315-316.

14. *Extension.* — La méthode employée aux n^{os} **6-8** permet également de trouver, presque sans calcul, les transformations ordinaires d'ordre $n = \pm 1$, qui permettent de passer d'une relation singulière donnée à une autre également donnée, mais nécessairement de même invariant que la première.

Soient les relations :

$$\begin{aligned} &Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \\ &A_1G + B_1H + C_1G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0, \end{aligned}$$

avec la condition

$$B^2 - 4AC - 4DE = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1.$$

Les transformations ordinaires du premier degré qui changent la première relation en la seconde ont leurs entiers c_i et d_i, donnés en fonction des a_i, b_i par les équations :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} Dc_0 &= Ab_0 - \varepsilon C_1 a_1 + \varepsilon E_1 a_2 - \frac{a_0}{2}(B + \varepsilon B_1) \\ Dc_1 &= Ab_1 + \varepsilon A_1 a_0 - \varepsilon E_1 a_3 - \frac{a_1}{2}(B - \varepsilon B_1) \\ Dc_2 &= Ab_2 - \varepsilon C_1 a_3 - \varepsilon D_1 a_0 - \frac{a_2}{2}(B - \varepsilon B_1) \\ Dc_3 &= Ab_3 + \varepsilon A_1 a_2 + \varepsilon D_1 a_1 - \frac{a_3}{2}(B + \varepsilon B_1) \\ Dd_0 &= Ca_0 + \varepsilon C_1 b_1 - \varepsilon E_1 b_2 - \frac{b_0}{2}(B - \varepsilon B_1) \\ Dd_1 &= Ca_1 - \varepsilon A_1 b_0 + \varepsilon E_1 b_3 - \frac{b_1}{2}(B + \varepsilon B_1) \\ Dd_2 &= Ca_2 + \varepsilon C_1 b_3 + \varepsilon D_1 b_0 - \frac{b_2}{2}(B + \varepsilon B_1) \\ Dd_3 &= Ca_3 - \varepsilon A_1 b_2 - \varepsilon D_1 b_1 - \frac{b_3}{2}(B - \varepsilon B_1) \end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les a_i et b_i sont liés uniquement par les deux relations (où $n = \pm 1$) :

$$\begin{aligned} &(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ &-A_1(ab)_{02} + B_1(ab)_{03} - C_1(ab)_{34} - D_1(ab)_{04} + E_1(ab)_{32} = \varepsilon n D. \end{aligned}$$

On mettrait les c_i et d_i sous forme entière par le procédé du n° 9.

Si D était nul, on trouverait sans difficulté les formules suivantes :

$$
(36)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Lambda b_0 &= \varepsilon C_1 a_1 - \varepsilon E_1 a_2 + \frac{a_0}{2}(B - \varepsilon B_1),\\
\Lambda b_1 &= -\varepsilon A_1 a_0 + \varepsilon E_1 a_3 + \frac{a_1}{2}(B - \varepsilon B_1),\\
\Lambda b_2 &= \varepsilon C_1 a_3 + \varepsilon D_1 a_0 + \frac{a_2}{2}(B - \varepsilon B_1),\\
\Lambda b_3 &= -\varepsilon A_1 a_2 - \varepsilon D_1 a_1 + \frac{a_3}{2}(B + \varepsilon B_1),\\
\Lambda d_0 &= \varepsilon C_1 c_1 - \varepsilon E_1 c_2 - E a_0 - \frac{1}{2}(B - \varepsilon B_1) c_0,\\
\Lambda d_1 &= -\varepsilon A_1 c_0 + \varepsilon E_1 c_3 - E a_1 - \frac{1}{2}(B + \varepsilon B_1) c_1,\\
\Lambda d_2 &= \varepsilon C_1 c_3 + \varepsilon D_1 c_0 - E a_2 - \frac{1}{2}(B + \varepsilon B_1) c_2,\\
\Lambda d_3 &= -\varepsilon A_1 c_3 - \varepsilon D_1 c_1 - E a_3 - \frac{1}{2}(B - \varepsilon B_1) c_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les a_i et c_i sont alors liés par les relations (où $n = \pm 1$) :

$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0,$$

$$-A_1(ac)_{02} + B_1(ac)_{03} + C_1(ac)_{13} - D_1(ac)_{01} - E_1(ac)_{21} = \varepsilon n \Lambda.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions abéliennes doublement singulières.

Généralités.

15. Les périodes d'une fonction abélienne étant ramenées à la forme normale, $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g), la fonction sera dite *double*-

ment singulière s'il existe, entre g, h, g', *deux* relations singulières du type (1), à savoir :

$$(1)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

$$(2)\qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

les A, B, ..., E, et de même les A_1, B_1, ..., E_1, étant des entiers sans diviseur commun.

Observons d'abord que nous avons le droit de supposer premiers entre eux les déterminants tels que $AB_1 - BA_1$, ..., $DE_1 - ED_1$, formés avec quatre coefficients correspondants des relations (1) et (2) : dans le cas contraire, il suffirait de remplacer une de ces relations par une de ses combinaisons linéaires avec l'autre. Nous dirons alors que le *système* (1) et (2) est *propre*.

Cela posé, soient F et F_1 les premiers membres des équations (1) et (2) : l'invariant d'une relation singulière entre les périodes étant nécessairement positif (*Journal de Math.*, 5e série, t. V, p. 246), il faut que l'invariant de la relation

$$(3)\qquad xF + yF_1 = 0,$$

où x et y désignent des entiers quelconques, soit positif [1]. Or, si l'on pose

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta = B^2 - 4AC - 4DE; \qquad \Delta_1 = B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1, \\ \delta = BB_1 - 2AC_1 - 2CA_1 - 2DE_1 - 2ED_1, \end{cases}$$

cet invariant a pour expression la *forme quadratique binaire* en x, y :

$$(5)\qquad \Delta x^2 + 2\delta xy + \Delta_1 y^2,$$

qui, par suite, doit être définie et positive. Les coefficients Δ et Δ_1 des carrés sont positifs, puisque ce sont respectivement les invariants des relations singulières (1) et (2); il suffit dès lors que le discriminant

[1] *Voir* aussi à ce sujet le Tome VI, 5e série, de ce *Journal*, p. 334-336.

de la forme (5), à savoir

$$\Delta\Delta_1 - \delta^2,$$

soit positif.

16. *Invariants.* — Opérons maintenant sur les périodes une transformation ordinaire du premier degré, quelconque d'ailleurs; les relations singulières $F = 0$, $F_1 = 0$ se changent respectivement en deux relations analogues, $F' = 0$, $F'_1 = 0$, qui constituent un système propre.

Car, s'il en était autrement, la relation $xF' + yF'_1 = 0$, où x et y sont des entiers premiers entre eux, aurait tous ses coefficients divisibles par un même facteur ; mais elle est la transformée de la relation $xF + yF_1 = 0$, *où les coefficients n'ont aucun facteur commun*, puisque le système $F = 0$, $F_1 = 0$ est propre, et l'on sait [1] qu'une telle relation est changée, par une transformation ordinaire d'ordre ± 1, en une relation jouissant de la même propriété.

Cela posé, les invariants de F' et F'_1 sont respectivement égaux à ceux, Δ et Δ_1, de F et F_1, d'après la définition même de l'invariant; on vérifie aisément par la marche suivie à propos de l'invariant [2] que la quantité δ définie par (4) est un invariant *simultané* des deux relations $F = 0$, $F_1 = 0$.

Il résulte de là que la forme quadratique (5) reste inaltérée quand on opère sur les deux relations singulières initiales une même transformation ordinaire du premier *degré*.

17. On peut aller plus loin, en remplaçant le système $F = 0$, $F_1 = 0$, par un système *arithmétiquement équivalent*, c'est-à-dire par

$$(S) \qquad \lambda F + \mu F_1 = 0, \qquad \lambda' F + \mu' F_1 = 0,$$

λ, μ, λ', μ' désignant des entiers tels que $\lambda\mu' - \lambda'\mu = \pm 1$: il est clair que le système (S) est propre en même temps que le système $F = 0$, $F_1 = 0$. La forme quadratique en x', y' qui lui correspond,

(1) *Ce Journal*, 5e série, t. V, p. 237.
(2) *Ibid.*, p. 236-237.

c'est-à-dire l'invariant de la relation

$$x'(\lambda F + \mu F_1) + y'(\lambda' F + \mu' F_1) = 0,$$

ou

$$(\lambda x' + \lambda' y') F + (\mu x' + \mu' y') F_1 = 0,$$

se calcule en remplaçant, dans la forme (5), x et y par $\lambda x' + \lambda' y'$ et $\mu x' + \mu' y'$. En d'autres termes, puisque $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ est égal à ± 1, la forme ainsi obtenue en x', y' est *équivalente*, proprement ou improprement, à la forme (5) en x, y. Si nous combinons ce résultat avec ceux du numéro précédent, nous arrivons à ce théorème :

18. Théorème. — *A un système propre de deux relations singulières* $F = 0$, $F_1 = 0$, *entre les périodes, correspond une forme quadratique binaire positive en x et y, qui est l'invariant de la relation singulière* $xF + yF_1 = 0$: *cette forme se change en une forme proprement ou improprement équivalente quand on remplace le système initial par un système arithmétiquement équivalent, ou quand on opère sur lui une transformation ordinaire de degré un.*

En d'autres termes, à tout *système* propre $F = 0$, $F_1 = 0$, est associée une *classe* de formes, l'équivalence entre deux formes quelconques de la classe étant propre ou impropre; cette classe demeure inaltérée pour une transformation de degré un effectuée sur le système initial ([1]).

19. *Invariant absolu du système.* — Il suit de là que le *système* $F = 0$, $F_1 = 0$ possède un invariant, à savoir le discriminant $\Delta\Delta_1 - \delta^2$ de la classe associée : la propriété peut aussi être vérifiée directement sans autre difficulté que la longueur des calculs. Nous appellerons cet invariant l'*invariant absolu;* il est toujours positif.

([1]) Dans tout ce Mémoire, à moins d'avis contraire, nous appellerons *classe* de formes quadratiques binaires l'ensemble des formes proprement ou improprement équivalentes à l'une d'elles; une de nos classes comprend donc *généralement* deux classes ordinaires opposées; la seule exception est qu'une classe ambiguë ordinaire constituera *à elle seule* une de nos classes.

20. *Problème inverse.* — Si *deux* systèmes de deux relations singulières donnent naissance à une *même* classe de formes binaires, ces deux systèmes sont-ils réductibles l'un à l'autre, par une transformation du premier degré? Sinon, à quels types canoniques peuvent se réduire tous les systèmes donnant naissance à une même classe?

Telle est la question que nous allons aborder; nous restreindrons souvent les démonstrations au cas où les coefficients B et B_1, qui figurent dans les relations (1) et (2), sont tous deux pairs : en ce cas, la forme (5), liée au système (1), (2), a tous ses coefficients divisibles par 4, et l'on reconnaît immédiatement, par l'examen des formules (4), que, dans tout système donnant naissance à une forme de la même classe, les coefficients analogues à B et B_1 sont également pairs.

Il n'y aura aucune difficulté à étendre les raisonnements au cas où B serait pair et B_1 impair; quant au cas de B et B_1 impairs, on le ramène au précédent en remplaçant le système $F = 0$, $F_1 = 0$ par le système arithmétiquement équivalent $F - F_1 = 0$, $F_1 = 0$.

21. *Remarque I.* — D'après cette dernière observation, on a toujours le droit de supposer B pair; la forme (5) appartient dès lors au type

$$4(ax^2 + bxy + cy^2), \qquad \text{si } B_1 \text{ est pair;}$$

$$4ax^2 + 4bxy + (4c + 1)y^2, \qquad \text{si } B_1 \text{ est impair.}$$

Réciproquement, une forme de l'un ou l'autre de ces types dérivera toujours d'un système propre de deux relations singulières; par exemple, les deux formes ci-dessus dérivent respectivement des systèmes propres

$$\begin{cases} h^2 - gg - a = 0, \\ g - cg' - b = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 - gg - a = 0, \\ g - h - cg' - b = 0. \end{cases}$$

Remarque II. — Il est aisé de reconnaître le *cas elliptique*, c'est-à-dire celui où une intégrale abélienne de première espèce, correspondant aux périodes considérées, est réductible à une intégrale elliptique. Nous avons établi [1] que ce cas est caractérisé par une relation

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. V, p. 217.

singulière entre les périodes ayant pour invariant un carré parfait : si donc les fonctions abéliennes considérées sont liées par un système de deux relations singulières, on sera placé dans un cas elliptique lorsque la forme quadratique associée au système pourra proprement représenter un carré; c'est-à-dire, en vertu d'un beau résultat de Gauss, lorsque cette forme appartiendra au genre principal.

Réduction d'un système de deux relations singulières.

22. Admettons, comme au n° **20**, que la forme (5), liée au système $F = 0$, $F_1 = 0$, à savoir

$$(5) \qquad \Delta x^2 + 2\delta xy + \Delta_1 y^2,$$

ait ses coefficients Δ, 2δ, Δ_1, divisibles par 4; nous désignerons par 4Ω leur plus grand commun diviseur.

Soit alors P un nombre premier *positif* représenté proprement par la forme (5), après division des coefficients de celle-ci par 4Ω : on sait, par un théorème célèbre de Dirichlet, qu'il existe une infinité de tels nombres premiers [1]. La forme (5), pour des valeurs x' et y', premières entre elles, de x et y, prendra donc la valeur $4\Omega P$. Si x'' et y'' sont des entiers tels que $x'y'' - y'x'' = \pm 1$, on pourra remplacer le système initial $F = 0$, $F_1 = 0$, par le système arithmétiquement équivalent $x'F + y'F_1 = 0$, $x''F + y''F_1 = 0$: d'ailleurs la première de ces nouvelles relations a pour invariant $4\Omega P$, en vertu de ce qui précède; on peut dès lors, par une transformation ordinaire d'ordre 1, T, la réduire au type

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

de même invariant, $4\Omega P$. Soient alors $\Phi = 0$ la transformée, par T, de $x''F + y''F_1 = 0$; D' le coefficient de $h^2 - gg'$ dans Φ; le système $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, $\Phi = 0$ peut être remplacé par le système arith-

---

[1] Il est clair qu'on a le droit de supposer que P ne divise pas Ω.

métiquement équivalent

$$(6)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \Phi - D(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

où la seconde relation est privée de terme en $h^2 - gg'$.

D'ailleurs toutes ces transformations n'ont pas changé la *classe* de la forme binaire (5) associée au système; celle-ci a donc toujours ses coefficients divisibles par 4Ω, ce qui exige d'abord que, dans les deux relations singulières finales (6), les coefficients des termes en h soient pairs. On a donc le droit de supposer le système initial (1), (2) ramené au type

$$(7)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

$$(8)\qquad \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

α, β, γ, ω désignant des entiers tels que α, 2β, γ, ω soient premiers entre eux. La forme quadratique binaire liée au système (7), (8) a pour expression

$$(9)\qquad 4[\Omega P x^2 + \omega xy + (\beta^2 - \alpha\gamma)y^2];$$

d'après ce qui vient d'être dit, elle doit être divisible par 4Ω, c'est-à-dire que ω et $(\beta^2 - \alpha\gamma)$ admettent le facteur Ω; ils n'admettent pas simultanément le facteur P, car 4Ω est le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme (5), et par suite aussi de ceux de la forme équivalente (9).

23. Considérons maintenant un second système de deux relations singulières donnant naissance à une forme binaire, proprement ou improprement équivalente à la forme (5). En opérant sur ce système comme sur le système initial, on le réduira au type

$$(10)\qquad h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

$$(11)\qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

Ω et P étant les mêmes que précédemment, puisqu'ils ne dépendent que de la classe de formes à laquelle appartient (5).

La forme associée au système (10) et (11), c'est-à-dire

$$(12)\qquad 4[\Omega P x^2 + \omega_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2]$$

étant équivalente (proprement ou improprement) à la forme (9), a même déterminant; donc on a

$$(13)\qquad \omega^2 - 4\Omega P(\beta^2 - \alpha\gamma) = \omega_1^2 - 4\Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1).$$

ce qui montre que $2P$ divise $\omega - \omega_1$ ou $\omega + \omega_1$. On en conclut aisément, ε_0 désignant l'unité positive ou négative,

$$(14)\qquad \omega_1 = \varepsilon_0\omega + 2\mu\Omega P \qquad (\varepsilon_0 = \pm 1),$$

car les quotients par Ω de ω et ω_1 sont de même parité. Cette condition, jointe à (13), suffit pour que les deux formes (9) et (12) soient équivalentes : remplaçons, en effet, x par $x + \varepsilon_0\mu y$ dans la forme (9); elle devient, si l'on tient compte de (13) et (14),

$$4[\Omega P x^2 + \varepsilon_0\omega_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2],$$

forme proprement ou improprement équivalente à (12), selon qu'on a $\varepsilon_0 = +1$ ou $\varepsilon_0 = -1$.

Observons enfin que l'équation (13), où l'on remplace ω par sa valeur tirée de (14), s'écrit, après division par $4\Omega P$,

$$(15)\qquad \beta^2 - \alpha\gamma = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 - \mu(\omega_1 - \mu\Omega P).$$

24. Cela posé, cherchons si les systèmes (7), (8) et (10), (11) peuvent être ramenés l'un à l'autre par une transformation ordinaire *d'ordre* 1, n'altérant pas la relation $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, commune aux deux systèmes.

Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, qu'une telle transformation change la relation (8), $\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0$, en une relation singulière appartenant au système (10), (11), c'est-à-dire du type

$$(16)\quad \mu'(\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1) + \lambda'(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

λ' et μ' étant entiers. D'ailleurs μ' doit être égal à ± 1, puisque le système (10), (16), déduit du système *propre* (7), (8) par une transformation d'ordre 1, est aussi un système propre (n° **16**); nous avons donc finalement à rechercher si une transformation ordinaire du premier *ordre*, n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, peut changer l'une dans l'autre les relations

$$\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

$$(17) \qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 - \lambda(h^2 - gg' - \Omega P) = 0,$$

λ désignant un entier.

Une première condition nécessaire est que ces relations aient même invariant, c'est-à-dire que l'on ait

$$(18) \qquad \beta^2 - \alpha\gamma = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 - \lambda(\omega_1 - \lambda\Omega P).$$

Soient maintenant a_i, b_i, c_i, d_i les seize entiers caractéristiques de la transformation cherchée; celle-ci n'altérant pas la relation

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

on a, entre ces entiers (n° **10**) les équations

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = -\varepsilon\Omega P a_2, \quad c_1 = \varepsilon\Omega P a_3, \quad c_2 = -\varepsilon a_0, \quad c_3 = \varepsilon a_1, \\ d_0 = \varepsilon\Omega P b_2, \quad d_1 = -\varepsilon\Omega P b_3, \quad d_2 = \varepsilon b_0, \quad d_3 = -\varepsilon b_1 \\ \qquad\qquad (\varepsilon = \pm 1), \end{array} \right.$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} (ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \\ (ab)_{01} - \Omega P(ab)_{23} = -\varepsilon. \end{array} \right.$$

D'après les formules (36) du n° **14**, où l'on fait $u = +1$, pour que la transformation (a_i, b_i, c_i, d_i) change l'une dans l'autre les relations (17), il faut et il suffit qu'on ait, entre les a_i, b_i, c_i, d_i, les équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha b_0 = \eta_1\gamma_1 a_1 + \eta_1(\omega_1 - \lambda\Omega P)a_2 - (\beta - \eta_1\beta_1)a_0 \\ \alpha b_1 = -\eta_1\alpha_1 a_0 - \eta_1(\omega_1 - \lambda\Omega P)a_3 + (\beta - \eta_1\beta_1)a_1 \\ \alpha b_2 = \eta_1\gamma_1 a_3 - \eta_1\lambda a_0 + (\beta - \eta_1\beta_1)a_2 \\ \alpha b_3 = -\eta_1\alpha_1 a_2 + \eta_1\lambda a_1 + (\beta - \eta_1\beta_1)a_3 \qquad (\eta_1 = \pm 1). \end{array} \right.$$

et

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha d_0 &= \eta\gamma_1 c_1 + \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)c_2 + \omega a_0 - (\beta - \eta\beta_1)c_0 \\ \alpha d_1 &= -\eta\alpha_1 c_0' - \eta(\omega_1 - \lambda\Omega P)c_3 + \omega a_1 - (\beta + \eta\beta_1)c_1 \\ \alpha d_2 &= \eta\gamma_1 c_3 - \eta\lambda c_0 + \omega a_2 - (\beta + \eta\beta_1)c_2 \\ \alpha d_3 &= -\eta\alpha_1 c_2 + \eta\lambda c_1 + \omega a_3 - (\beta - \eta\beta_1)c_3 \end{aligned}\right. \qquad (\eta = \pm 1),$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &(ac)_{03} + (ac)_{12} = 0, \\ &-\alpha_1(ac)_{02} + 2\beta_1(ac)_{03} + \gamma_1(ac)_{13} + \lambda(ac)_{01} + (\omega_1 - \lambda\Omega P)(ac)_{23} = \eta\alpha. \end{aligned}\right.$$

Des simplifications importantes se produisent dans ce système.

Portons en effet dans (22) les valeurs des d_i, c_i, b_i déduites de (19) et (21); les quatre équations (22) se réduisent à une seule

$$\varepsilon\eta\omega_1 - \omega = 2\varepsilon\eta\lambda\Omega P,$$

qui, par comparaison avec (14), entraîne

$$(24)\qquad \lambda = \mu, \qquad \varepsilon\eta = \varepsilon_0,$$

ε_0 étant l'unité et μ l'entier définis par la formule (14). La relation (18) est dès lors vérifiée d'elle-même, puisqu'elle devient identique à l'équation (15), qui est supposée satisfaite.

Les relations (21) et (19) donnent donc les valeurs des b_i, c_i, d_i en fonction des a_i; enfin les relations (20) et (23) se réduisent, à l'aide de (24), à la suivante :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) \\ &+ 2\beta_1(a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3) + \omega_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \varepsilon_0\alpha. \end{aligned}\right.$$

Nous arrivons donc enfin à la conclusion suivante :

Les systèmes (7), (8) *et* (10), (11), *qu'on suppose donner naissance à deux formes binaires équivalentes (proprement ou non), seront réductibles l'un à l'autre par une transformation d'ordre* 1 *si les équations* (25) *et* (21), *où* a_0, a_1, a_2, a_3 *et* b_0, b_1, b_2, b_3 *sont les inconnues, sont résolubles en nombres entiers.*

25. *Remarque I.* — Nous avons supposé, dans ces formules, que les transformations du premier ordre introduites sont d'ordre $+1$, c'est-à-dire qu'on a $(ad)_{03}+(ad)_{12}=+1$. Mais on doit aussi considérer les transformations d'ordre -1, pour lesquelles

$$(ad)_{03}+(ad)_{12}=-1,$$

et qu'on obtient en combinant les premières avec celle qui change les signes de g, h, g' et qui est définie par $a_0=b_1=1$; $c_2=d_3=-1$, et les autres a_i, b_i, c_i, d_i nuls. Ces transformations d'ordre -1 n'altèrent pas non plus les modules des fonctions abéliennes considérées.

Dans ces conditions l'équation (25) est remplacée par la même équation, où le second membre est $\pm\varepsilon_0\alpha$.

La question de reconnaître si les systèmes (7), (8) et (10), (11) sont réductibles l'un à l'autre est ainsi ramenée à celle de la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), où ε_0 et η sont regardées comme des *indéterminées* susceptibles de prendre les valeurs ± 1. Quant à λ, c'est, d'après (14) et (24), le quotient par $2\Omega P$ de celle des deux quantités $\omega_1\pm\omega$ qui admet le facteur P.

L'équation (25), à savoir

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_1(a_0^2-\Omega P a_2^2)+\gamma_1(a_1^2-\Omega P a_3^2)\\ &+2\beta_1(a_0a_1+\Omega P a_2a_3)+\omega_1(a_0a_3-a_1a_2)=\varepsilon_0\alpha \end{aligned}\right.$$

ne contient que les inconnues a_0, a_1, a_2, a_3; quant aux équations (21), on peut les écrire sous forme de congruences :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\eta\gamma_1 a_1+\eta(\omega_1-\lambda\Omega P)a_2+(\beta_1-\eta\beta_1)a_0&&\equiv 0\\ -\eta\alpha_1 a_0-\eta(\omega_1-\lambda\Omega P)a_3&+(\beta_1-\eta\beta_1)a_1&&\equiv 0\\ \eta\gamma_1 a_3-\eta\lambda a_0&+(\beta_1-\eta\beta_1)a_2&&\equiv 0\\ -\eta\alpha_1 a_2+\eta\lambda a_1&+(\beta_1-\eta\beta_1)a_3&&\equiv 0 \end{aligned}\right. \pmod{\alpha}.$$

Il est à observer que le déterminant des coefficients de a_0, a_1, a_2, a_3 dans les premiers membres est, en vertu de (18), multiple de α; les congruences n'exigent donc pas que a_0, a_1, a_2, a_3 soient eux-mêmes multiples de α, ce qui rendrait l'équation (25) impossible à résoudre.

26. *Remarque II.* — Au lieu de rechercher directement si les deux systèmes proposés sont réductibles l'un à l'autre, on peut opérer la recherche sur deux autres systèmes, respectivement réductibles aux précédents par une transformation du premier ordre n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P$. Par exemple, si l'on effectue sur le système (10), (11) une telle transformation, on remplacera la seconde équation de ce système,

$$\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 = 0,$$

en tenant compte de $h^2 - gg' - \Omega P = 0$, par la suivante :

$$\alpha_0 g + 2\beta_0 h + \gamma_0 g' - \omega_0 = 0,$$

où les entiers α_0, β_0, γ_0, ω_0 sont donnés en fonction de α_1, β_1, γ_1, ω_1 par les relations

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_1(n_1^2 - \Omega P n_3^2) + 2\beta_1(\Omega P m_3 n_3 - m_1 n_1)\\
&\quad + \gamma_1(m_1^2 - \Omega P m_3^2) - \omega_1(m_3 n_1 - m_1 n_3),\\
2\beta_0 &= -2\alpha_1(n_0 n_1 + \Omega P n_2 n_3) + 2\beta_1(2m_0 n_1 + 2\Omega P m_3 n_2 - 1)\\
&\quad - 2\gamma_1(m_0 m_1 + \Omega P m_2 m_3) - 2\omega_1(m_0 n_3 - m_3 n_0),\\
\gamma_0 &= \alpha_1(n_0^2 - \Omega P n_2^2) + 2\beta_1(\Omega P m_2 n_2 - m_0 n_0)\\
&\quad + \gamma_1(m_0^2 - \Omega P m_2^2) - \omega_1(m_0 n_2 - m_2 n_0),\\
\omega_0 &= 2\alpha_1 \Omega P(n_1 n_2 + n_0 n_3) - 4\beta_1 \Omega P(m_0 n_3 + m_1 n_2)\\
&\quad + 2\gamma_1 \Omega P(m_0 m_3 + m_1 m_2) + \omega_1[1 + 2\Omega P(m_2 n_3 - m_3 n_2)].
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules m_0, m_1, m_2, m_3 et n_0, n_1, n_2, n_3 désignent huit entiers, assujettis seulement aux conditions

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned}
(mn)_{01} - \Omega P(mn)_{23} &= 1,\\
(mn)_{12} + \quad (mn)_{03} &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir ces formules, on a supposé $\varepsilon = -1$, $n = +1$, dans la transformation indiquée au n° **10**, n'altérant pas $h^2 - gg' - \Omega P = 0$.

27. *Remarque III.* — La forme quadratique quaternaire en a_0, a_1, a_2, a_3 qui constitue le premier membre de (25) peut recevoir une

expression remarquable. Supposons, pour fixer les idées, ω_1 pair; l'équation (25), après multiplication des deux membres par α_1, s'écrit

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_1 a_0 + \beta_1 a_1 - \frac{\omega_1}{2} a_3\right)^2\\ &= \Omega P(\alpha_1 a_2 - \beta_1 a_3)^2 + 2\frac{\omega_1}{2} a_1(\alpha_1 a_2 - \beta_1 a_3)\\ &= a_1^2(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) + a_3^2\left[\Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \frac{\omega_1^2}{4}\right] = \varepsilon_0 \alpha\alpha_1.\end{aligned}$$

Le premier membre est une forme quaternaire du type

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned}&U^2 - \Omega P Y^2 + 2\frac{\omega_1}{2} XY - (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) X^2\\ &\quad + \left[\Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \frac{\omega_1^2}{4}\right] Z^2.\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ le quart de la forme (12) associée au système (10), (11), à savoir

$$\varphi(x, y) = \Omega P x^2 + 2\frac{\omega_1}{2} xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) y^2,$$

la forme ternaire $z^2 - \varphi(x, y)$ a pour adjointe la forme

$$\begin{aligned}F(X, Y, Z) = &-\Omega P Y^2 + 2\frac{\omega_1}{2} XY - (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) X^2\\ &+ \left[\Omega P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \frac{\omega_1^2}{4}\right] Z^2,\end{aligned}$$

de sorte que la forme quaternaire (29) est $U^2 + F(X, Y, Z)$, qu'on rencontre dans la recherche des transformations en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$.

28. Revenons maintenant à l'étude de la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), en a_i et b_i, puisque c'est à cette étude que nous avons ramené le problème de la réduction l'un à l'autre des deux systèmes (7), (8) et (10), (11).

Nous distinguerons plusieurs cas.

29. *Premier cas.* — $\Omega = 1$, ou 2. Supposons d'abord $\Omega = 1$, et, pour fixer les idées, ω_1 pair, $\omega_1 = 2\omega'_1$. La forme (12) associée au système (10), (11) est, après division par 4,

$$(30) \qquad Px^2 + 2\omega'_1 xy + (\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1)y^2;$$

elle est, en vertu de $\Omega = 1$, proprement primitive; son discriminant est $P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega'^2_1$.

Je dis que, si ce discriminant est impair, le système (10), (11) est réductible à un système du type

$$(31) \qquad h^2 - gg' - P = 0; \qquad g - mg' - 2n = 0,$$

m et n n'étant assujettis qu'à la seule condition que la forme associée à (31), après division par 4, c'est-à-dire $Px^2 + 2nxy + my^2$, soit équivalente (proprement ou non) à la forme (30) [1]. Pour l'établir, il suffit, en vertu de la théorie générale, de montrer que les équations (25) et (21) ont, en a_i et b_i, des solutions entières lorsqu'on y fait $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Or, dans ce cas, les équations (21) fournissent, pour les b_i, des valeurs entières en fonction des a_i, de sorte que tout revient à établir la résolubilité, en nombres entiers a_i, de l'équation (25), qui s'écrit ici

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1(a_0^2 - Pa_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\beta_1(a_0a_1 + Pa_2a_2) \\ &\qquad\qquad + 2\omega'_1(a_0a_3 + a_1a_2) \quad = \pm 1. \end{aligned} \right.$$

Observons d'abord que nous avons le droit de supposer γ_1 positif, impair, et premier à ω'_1 : car, s'il en est autrement, nous remplacerons α_1, β_1, γ_1, ω_1 par les valeurs α_0, β_0, γ_0, ω_0 données au n° **26**, en supposant, dans les formules de ce numéro, $m_2 = m_3 = n_2 = n_3 = 0$, et

---

[1] Cette proposition entraîne évidemment la suivante : deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes équivalentes, divisibles par 4, et après cette division, proprement primitives et de déterminant impair, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré 1, car les deux systèmes sont réductibles à un *même* système (31).

$m_0 n_1 - m_1 n_0 = 1$, ce qui vérifie les équations (28). En vertu des formules (27), on aura $\omega_0 = \omega_1$ et $\gamma_0 = \alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 m_0 n_0 + \gamma_1 m_0^2$: or on peut choisir m_0 et n_0, premiers entre eux, de manière que γ_0 soit positif, impair, et n'ait aucun facteur commun avec ω_1 ; car, d'après l'hypothèse initiale, α_1, $2\beta_1$, γ_1, ω_1 n'ont pas de facteur commun, et la forme $\alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 m_0 n_0 + \gamma_1 m_0^2$ est indéfinie, puisque $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, invariant de la relation (11), est positif.

Cela posé, faisons $a_2 = 0$ dans l'équation (32) ; celle-ci devient

$$(33) \qquad \alpha_1 a_0^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + \gamma_1 a_1^2 - \gamma_1 P a_3^2 + 2\omega_1 a_0 a_3 = \pm 1.$$

Le premier membre est une forme quadratique ternaire, *indéfinie*, puisque P est positif, *proprement primitive*, puisque α_1, $2\beta_1$, γ_1, $2\omega_1$ n'ont pas de diviseur commun ; son discriminant est

$$\gamma_1[P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1'^2],$$

quantité positive et impaire en vertu de ce qui précède.

La forme adjointe du premier membre de (33) a pour coefficients

$$\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1, \quad \gamma_1^2 P, \quad \omega_1'^2 + \alpha_1\gamma_1 P, \quad 2\gamma_1\omega_1, \quad 2\beta_1\omega_1, \quad 2\gamma_1\beta_1 P;$$

comme $\gamma_1^2 P$, coefficient d'un des carrés, est impair, le plus grand commun diviseur de ces coefficients est impair : je dis qu'il est égal à l'unité.

Car, s'il admettait un facteur premier, d, impair et différent de 1, d diviserait $2\gamma_1\omega_1'$, c'est-à-dire γ_1 ou ω_1', mais non les deux, puisque γ_1 et ω_1' sont premiers entre eux. Or, si d divisait γ_1, comme il divise $\omega_1'^2 + \alpha_1\gamma_1 P$, il diviserait ω_1', contrairement à l'hypothèse précédente ; s'il divisait ω_1', il diviserait P, puisqu'il divise $\gamma_1^2 P$: ce serait donc, puisque d entre aussi en facteur dans $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, un diviseur commun de P, ω_1', $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, et la forme (30) ne serait pas primitive, c'est-à-dire que Ω serait différent de 1, résultat en contradiction avec l'hypothèse.

En résumé, la forme ternaire indéfinie qui constitue le premier membre de (33) et son adjointe sont proprement primitives, et, comme

la première a son discriminant impair, elle peut, d'après un théorème connu [1], représenter $+1$ ou -1.

On arrive, par un raisonnement semblable, au même résultat, si $\Omega = 2$, et si $\omega_1 = 2\omega'_1$, ω'_1 étant impair; c'est-à-dire si la forme binaire associée au système proposé est, après division par 4, improprement primitive.

Enfin, si, Ω étant égal à 1, ω_1 était impair, la quantité

$$4P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1^2$$

serait impaire. Comme plus haut, nous avons le droit de supposer γ_1 impair et premier à ω_1 : je dis que l'équation (25) est encore résoluble pour $\alpha = \pm 1$.

Car elle s'écrit

$$\begin{aligned}\alpha_1(a_0^2 - Pa_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\beta_1(a_0a_1 + Pa_2a_3)\\ + \omega_1(a_0a_3 + a_1a_2) = \pm 1;\end{aligned}$$

et, si nous y faisons $a_2 = 0$, $a_0 = 2a'_0$, elle devient

$$4\alpha_1 a_0'^2 + 4\beta_1 a'_0 a_1 + \gamma_1(a_1^2 - Pa_3^2) + 2\omega_1 a'_0 a_3 = \pm 1.$$

Le premier membre est encore une forme ternaire indéfinie, proprement primitive, de discriminant impair, $\gamma_1[4P(\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1) - \omega_1^2]$; on reconnaît, comme plus haut, que son adjointe est proprement primitive, et, par suite, la forme peut représenter $+1$ ou -1.

30. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

I. *Deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes binaires, proprement ou improprement équivalentes entre elles et divisibles par 4, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré 1, dans les deux cas suivants :*

1° *Les deux formes, après division par 4, sont proprement ou improprement primitives et de discriminant impair;*

---

[1] Voir, par exemple, Meyer, *Journal de Crelle*, t. 115, p. 179; et Bachmann, *Zahlentheorie*, 4e Partie, p. 254-255.

2° *Les deux formes, après division par* 2, *sont improprement primitives.*

Il subsiste une lacune, relative au cas où les deux formes, après division par 4, seraient proprement primitives et de discriminant pair : pour étendre le théorème à ce cas, il suffirait d'établir que l'équation (32) est encore résoluble en nombres entiers. Nous n'avons pas réussi à le faire d'une manière générale [1]; nous verrons du moins plus bas que les systèmes de relations singulières, donnant naissance aux formes d'une *classe* qui, après division par 4, est proprement primitive et de déterminant pair, peuvent se réduire à un *nombre fini* d'entre eux [2].

51. Enfin, en restant toujours dans l'hypothèse de $\Omega = 1$, et en étudiant, d'une manière analogue à la précédente, les systèmes de deux relations qui donnent naissance à une forme $4ax^2 + 4bxy + (4c+1)y^2$, on arriverait à cette conclusion :

II. *Deux systèmes de deux relations singulières donnant naissance à deux formes binaires, proprement ou improprement équivalentes entre elles et non divisibles par* 4, *sont réductibles l'un à l'autre lorsque les formes sont primitives et que le quotient de leur discriminant commun par le facteur* 4, *qu'il contient nécessairement, est impair* (*ou impairement pair*).

---

(1) Dans une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, nous avions énoncé le théorème sans aucune restriction, trompé par une erreur de calcul qui nous avait fait croire à la possibilité de représenter, dans tous les cas, une forme ternaire, proprement primitive, de déterminant impair, par la forme quaternaire qui constitue le premier membre de (32).

(2) Nous avons reconnu, pendant l'impression de ce Mémoire, que le théorème I est encore vrai lorsque les deux formes, après division par 4, sont *primitives et de déterminant pair, mais non multiple de* 4. Nous nous appuyons, pour l'établir, sur ce théorème d'Arn. Meyer (*Crelle*, t. 108), que deux formes ternaires indéfinies, d'invariants Ω, Δ, et appartenant au même genre, sont équivalentes, lorsque les nombres Ω et Δ ne sont pas divisibles par 4 et n'ont pas de diviseur commun impair. On en déduit aisément que, dans le cas indiqué, l'équation (32) est encore résoluble en nombres entiers, ce qui établit notre théorème.

Il subsiste là encore une lacune, relative au cas où le discriminant serait multiple de 16; nous verrons encore que les systèmes donnant naissance à une classe de ce type, se ramènent à un *nombre fini* d'entre eux.

32. *Second cas.* — $\Omega > 2$. Il n'est plus possible alors de réduire, dans tous les cas, le système (10), (11) à un système analogue pour lequel α soit égal à ± 1, c'est-à-dire, sous une autre forme, que l'équation (25), pour $\alpha = \pm 1$, à savoir :

$$\alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) + 2\beta_1(a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3) + \omega_1(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm 1,$$

n'a généralement pas de solutions. On en déduirait effectivement, en observant que ω_1 est divisible par Ω,

$$\alpha_1 a_0^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + \gamma_1 a_1^2 \equiv \pm 1 \pmod{\Omega};$$

or les nombres représentés par la forme qui figure au premier membre ont tous même caractère quadratique par rapport à un diviseur impair quelconque de Ω, puisque le discriminant de cette forme, $\beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1$, est multiple de Ω, d'après l'hypothèse même : la congruence ci-dessus n'est donc possible que si les caractères quadratiques précédents coïncident avec ceux de $+1$, ou de -1, ce qui n'a évidemment pas lieu en général.

33. Nous bornerons notre étude au résultat suivant.

Supposons Ω *impair*, ω_1 pair : $\omega_1 = 2\omega'_1$; désignons par δ_i un diviseur premier quelconque de Ω.

Les deux systèmes

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h^2 - gg - \Omega P = 0, \\ \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g - 2\omega'_1 = 0, \end{cases}$$

sont toujours censés donner naissance à deux formes binaires proprement ou improprement équivalentes entre elles : nous désignerons

par J le seizième de leur invariant absolu commun,

$$J = \Omega P(\beta_i^2 - \alpha_i \gamma_i) - \omega_i^2,$$

nombre divisible par Ω^2, puisque $\beta_i^2 - \alpha_i \gamma_i$ et ω_i sont multiples de Ω.

Cela posé, les deux systèmes (Σ) sont réductibles l'un à l'autre si les conditions ci-dessous sont satisfaites :

a) Les deux formes associées à ces systèmes sont, après division par 4Ω, des formes proprement primitives [1], de déterminant impair et premier avec Ω : ce déterminant est la quantité $\frac{J}{\Omega^2}$, de sorte que J est impair.

b) Les caractères quadratiques, par rapport à chacun des diviseurs δ_i, de Ω, des deux formes

$$f = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \qquad \text{et} \qquad f_1 = \alpha_1 x^2 + 2\beta_1 xy + \gamma_1 y^2$$

sont liés par les relations.

$$(34) \qquad \left(\frac{f_1}{\delta_i}\right) = \left(\frac{f}{\delta_i}\right), \qquad \cdots \qquad (\text{pour toutes les valeurs de } i)$$

ou par les relations

$$(34\ bis) \qquad \left(\frac{f_1}{\delta_i}\right) = \left(\frac{-f}{\delta_i}\right), \qquad \cdots \qquad (\text{pour toutes les valeurs de } i).$$

De ce théorème, supposé établi, on conclut immédiatement [2] que les systèmes (propres), qui donnent naissance à des formes, proprement ou improprement équivalentes entre elles, du type $4\Omega\varphi$, Ω désignant un nombre impair, et φ une forme binaire proprement primitive, de déterminant premier à 2Ω, se réduisent à un nombre fini d'entre eux : ce nombre est celui des caractères quadratiques possibles par rapport aux diviseurs premiers de Ω, si ceux-ci sont tous de la forme $4N + 1$, et à la moitié de ce nombre dans le cas contraire.

---

(1) Cette condition est vérifiée d'elle-même, puisque ω_1 et ω sont pairs.

(2) *Voir* aussi à ce sujet la remarque du n° 35.

Pour démontrer le théorème, il suffit (n° **24**) d'établir la résolubilité en nombres entiers des équations (25) et (21), quand les conditions a) et b) sont satisfaites.

34. Voici la marche générale de la démonstration.

En vertu de la remarque du n° **26**, on a le droit de supposer α_1, β_1, γ_1, de somme paire; puis de les remplacer par

$$\alpha_1; \quad -\alpha_1 n_0 + \beta_1; \quad \alpha_1 n_0^2 - 2\beta_1 n_0 + \gamma_1,$$

ou par

$$\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2; \quad -\gamma_1 m_1 + \beta_1; \quad \gamma_1;$$

sans altérer $2\omega'_1$: dans ces formules n_0 et m_1 désignent des entiers arbitraires. Il en résulte sans difficulté, puisque α_1, $2\beta_1$, γ_1 et $2\omega'_1$ n'ont pas de diviseur commun, qu'on peut supposer α_1 positif, impair et premier à ω'_1; dès lors $\beta_1 + \gamma_1$ est impair.

Cela étant, la quantité $\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2$, si m_1 est impairement pair, est congrue, suivant le module 8, à $\alpha_1 + 4(\gamma_1 + \beta_1)$, c'est-à-dire à $\alpha_1 + 4$: on pourra donc supposer, en désignant par p un nombre premier donné, que la quantité $\frac{J}{\Omega^2}\alpha_1 p$ n'est pas congrue à 7 (mod 8); car si elle l'était, il suffirait de remplacer α_1 par la valeur précédente $\alpha_1 - 2\beta_1 m_1 + \gamma_1 m_1^2$, et la quantité $\frac{J}{\Omega^2}\alpha_1 p$ deviendrait congrue à 3 (mod 8).

Cela posé, je désigne par p un nombre premier, non diviseur de α_1 et de J, et ayant, par rapport à chaque diviseur δ_i de Ω, le même caractère quadratique que α_1 [1] : je dis qu'on peut réduire le système (10), (11),

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - 2\omega'_1 = 0,$$

à un système du même type, où le coefficient de g, dans la seconde relation, serait p.

---

[1] Un tel nombre existe, car la forme qui constitue le premier membre de (25) ne représente que des nombres jouissant de cette propriété, et peut évidemment représenter une infinité de nombres premiers.

Il suffit pour cela, d'après la théorie générale, de prouver la résolubilité en nombre entiers des équations (25) et (21), *γ et β étant regardés*, dans (21), *comme des indéterminées*, et α étant remplacé par p.

Or, en premier lieu, l'équation (25)

$$(25)\quad \begin{cases} \alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1(a_1^2 - \Omega P a_3^2) \\ \qquad + 2\beta_1(a_0 a_1 - \Omega P a_2 a_3) + 2\omega'_1(a_0 a_3 - a_1 a_2) = p \end{cases}$$

admet des solutions entières. Faisons-y, par exemple, $a_3 = 0$: le premier membre se réduit à une forme ternaire, indéfinie et proprement primitive,

$$(35)\qquad \alpha_1(a_0^2 - \Omega P a_2^2) + \gamma_1 a_1^2 + 2\beta_1 a_0 a_1 + 2\omega'_1 a_1 a_2,$$

de discriminant $\alpha_1 J$, quantité positive et impaire, d'après nos hypothèses.

On reconnaît ensuite, comme au n° **29**, que la forme adjointe a ses coefficients divisibles par Ω, et devient, après cette division, proprement primitive.

Or, en vertu d'un important théorème déjà cité [1], pour que la forme (35) représente proprement le nombre p, il est nécessaire que le caractère quadratique de p, par rapport à chaque diviseur δ_i de Ω, soit celui de la forme, c'est-à-dire, d'après (35), celui de α_1 : ces conditions sont vérifiées par hypothèse; elles sont d'ailleurs suffisantes si $\alpha_1 \frac{1}{\Omega^2} p$ n'est pas congru à 7 suivant le module 8, ce qu'on a eu le droit d'admettre. L'équation (25) est donc résoluble.

---

[1] Meyer, *Crelle*, t. 115, p. 179; ou Bachmann, *Zahlentheorie*, 1e Partie, p. 254. L'énoncé de ce théorème est le suivant : *Soit f une forme quadratique ternaire, indéfinie, proprement primitive, et d'invariants Ω, Δ, impairs et premiers entre eux; la condition nécessaire et suffisante pour que f puisse représenter un nombre impair, m, premier à $\Omega\Delta$, et tel que Δm ne soit pas congru à 7* (mod 8), *est qu'on ait, pour tout diviseur premier, δ_i, de Ω,*

$$\left(\frac{f}{\delta_i}\right) = \left(\frac{m}{\delta_i}\right).$$

Il reste maintenant à examiner si les équations (21), où l'on remplace a_0, a_1, a_2, a_3, par une solution de (25), ont des solutions: elles s'écrivent, si l'on y fait, par exemple, $\gamma_1 = +1$,

$$(21\ bis)\quad \begin{cases} pb_0 - \beta a_0 - \lambda \Omega P a_2 = \gamma_1 a_1 + \omega_1 a_2 + \beta_1 a_0, \\ pb_1 - \beta a_1 - \lambda \Omega P a_3 = \alpha_1 a_0 - \omega_1 a_3 - \beta_1 a_1, \\ pb_2 - \beta a_2 + \lambda a_0 = \gamma_1 a_3 - \beta_1 a_2, \\ pb_3 - \beta a_3 - \lambda a_1 = -\alpha_1 a_2 + \beta_1 a_3. \end{cases}$$

Ce sont quatre équations linéaires par rapport aux *six* inconnues b_0, b_1, b_2, b_3, β, λ; la matrice des coefficients des inconnues est :

$$\begin{matrix} p & 0 & 0 & 0 & a_0 & +\Omega P a_2, \\ 0 & p & 0 & 0 & a_1 & -\Omega P a_3, \\ 0 & 0 & p & 0 & a_2 & a_0, \\ 0 & 0 & 0 & p & a_3 & -a_1. \end{matrix}$$

Les déterminants d'ordre 4 qu'elle contient sont tous divisibles par p^2; je dis que p^2 est leur plus grand commun diviseur. En effet, parmi ces déterminants figurent, après division par p^2, les quantités

$$a_0^2 - \Omega P a_2^2;\quad a_0 a_3 + a_1 a_2;\quad a_0 a_1 + \Omega P a_2 a_3;\quad a_1^2 - \Omega P a_3^2;$$

qui, en vertu de (25), ne peuvent admettre, comme diviseur commun, que p : or, parmi les solutions entières de (25), qui sont évidemment en nombre infini, il est clair qu'on a pu en choisir une, telle que les quatre quantités ci-dessus ne soient pas divisibles par p; et, dès lors, le plus grand commun diviseur cherché est bien p^2.

Il faut maintenant, pour que les équations (21 *bis*) soient résolubles, que les déterminants, formés avec trois colonnes quelconques de la matrice et la colonne des second membres de (21 *bis*), soient divisibles par p^2, c'est-à-dire que p soit en facteur dans chacun des mi-

neurs d'ordre 3 contenus dans le Tableau :

$$\begin{array}{llll} a_0 & -\Omega P a_2 & \gamma_1 a_1 + \omega_1 a_2 & \beta_1 a_0, \\ a_1 & \Omega P a_3 & -\alpha_1 a_0 - \omega_1 a_1 & \beta_1 a_1, \\ a_2 & a_0 & \gamma_1 a_3 & -\beta_1 a_2, \\ a_3 & -a_1 & -\alpha_1 a_2 & -\beta_1 a_1. \end{array}$$

Or, en développant, on trouve que les quatre mineurs contiennent, en facteur, le premier membre de (25), c'est-à-dire p, ce qui établit finalement la résolubilité des équations (25) et (21 *bis*), et, par suite, la proposition qu'on avait en vue.

Le nombre p ayant, par rapport à chaque δ_i, le caractère quadratique de α_i, aura aussi, d'après les hypothèses, celui de α (ou celui de $-\alpha$); donc, en vertu du raisonnement précédent, on pourra réduire le premier système Σ :

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0, \qquad \alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0,$$

à un système du même type, où le coefficient de g sera $= p$ (ou $= p$) : de sorte, finalement, que les deux systèmes Σ proposés seront respectivement ramenés aux types

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ pg + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega' = 0. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} h^2 - gg' - \Omega P = 0, \\ pg + 2\beta_1 h - \gamma_1 g - 2\omega_1 = 0, \end{array}\right.$$

les β, γ, ω n'étant pas, bien entendu, les mêmes que précédemment.

En vertu des théorèmes généraux, les deux systèmes (S) donnent naissance à des formes binaires équivalentes (proprement ou non) : chacun d'eux a, pour invariant absolu, la quantité $16\,d$, qui n'a pas été altérée par les transformations effectuées.

Je dis maintenant que les deux systèmes (S) sont réductibles l'un à l'autre; montrons encore, pour cela, que les équations (25) et (21), où l'on suppose $\alpha = \alpha_1 = p$, sont résolubles en nombres entiers : on y considère cette fois β et λ comme des quantités données, les seules inconnues sont les a_i et les b_i.

Posons, à cet effet, dans (21) et (25),

$$(36)\qquad a_0 = (\beta - \beta_1)\xi, \qquad a_1 = p\zeta, \qquad a_2 = \lambda\xi, \qquad a_3 = \lambda\theta,$$

ξ, ζ, θ étant des entiers indéterminés. Les équations (21), ou, ce qui revient au même, les congruences (26) se trouvent vérifiées d'elles-mêmes, en tenant compte de (18); tout revient ainsi à établir que l'équation (25) est résoluble quand on y remplace les a_i par leurs valeurs (36), c'est-à-dire qu'on peut trouver des entiers ξ, ζ et θ tels qu'on ait :

$$\begin{aligned}&[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]\xi^2+p\gamma_1(\zeta^2-\Omega P\theta^2)\\&\quad+2\beta_1\xi[(\beta-\beta_1)\zeta+\Omega P\lambda\theta]+2\omega'_1\xi[(\beta-\beta_1)\theta+\lambda\zeta]=+1.\end{aligned}$$

Le premier membre est une forme ternaire, proprement primitive, indéfinie; de déterminant $Jp\gamma_1[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]$. On voit aisément, en s'appuyant sur la remarque du n° **26**, qu'on a le droit d'altérer β, γ, β_1, γ_1, sans altérer p, de manière que ce déterminant soit impair et que $\frac{J}{\Omega^2}p\gamma_1[(\beta-\beta_1)^2-\Omega P\lambda^2]$ soit premier à Ω et non congru à 7 suivant le module 8. De même, la forme adjointe sera, après division par Ω, une forme proprement primitive, et il résulte de là, sans difficulté, en vertu du théorème déjà invoqué (Note de la p. 85), que la forme pourra représenter le nombre $+1$.

35. Le théorème énoncé au n° **33** est donc complètement établi; on aurait un résultat analogue, facile à énoncer, dans le cas où ω_1 (et par suite ω) serait impair; et dans celui où le coefficient de h, dans l'équation (11), et par suite dans (8), serait impair.

Dans tous les autres cas, ainsi qu'on le verra plus loin, les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes d'une même classe se réduisent toujours à un nombre limité d'entre eux.

Remarque. — Reprenons le premier système Σ :

$$(\Sigma)\qquad\left\{\begin{aligned}&h^2-gg'-\Omega P=0,\\&\alpha g+2\beta h+\gamma g'-2\omega'=0,\end{aligned}\right.$$

et supposons que, par une transformation ordinaire quelconque de degré un, T, on ait ramené ce système à la forme

$$(\Sigma_0)\qquad\left\{\begin{aligned}&H^2-GG'-\Delta_0=0,\\&\alpha_0G+2\beta_0H+\gamma_0g-2\omega_0=0;\end{aligned}\right.$$

l'entier Δ_0 sera nécessairement divisible par Ω, et il en sera de même des entiers ω'_0 et $\beta_0^2 - \alpha_0\gamma_0$, puisque les formes associées à (Σ) et à (Σ_0) sont équivalentes, et que la première admet, par hypothèse, le diviseur Ω. On a donc $\Delta_0 = \Omega D$, l'entier D n'étant pas d'ailleurs premier, en général.

Cela posé, je dis que les caractères quadratiques de α_0, par rapport aux diviseurs premiers, δ_i, de Ω, sont simultanément les mêmes que ceux de α, ou que ceux de $-\alpha$, en supposant α_0 et α premiers à Ω [1].

Soit, en effet,

$$\lambda(h^2 - gg' - \Omega P) + \lambda'(\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - 2\omega') = 0$$

la relation singulière, appartenant au système (Σ), que la transformation T change en $H^2 - GG' - \Omega D = 0$; on aura, d'après les formules (35) du n° **14**, entre les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i de T, les relations :

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda c_0 &= \lambda'\alpha b_0 - \varepsilon\Omega D a_2 - \beta\lambda' a_0,\\
\lambda c_1 &= \lambda'\alpha b_1 + \varepsilon\Omega D a_1 - \beta\lambda' a_1,\\
\lambda c_2 &= \lambda'\alpha b_2 - \varepsilon a_0 \qquad - \beta\lambda' a_2,\\
\lambda c_3 &= \lambda'\alpha b_1 + \varepsilon a_1 \qquad - \beta\lambda' a_3,\\
\lambda d_0 &= \lambda'\gamma a_0 + \varepsilon\Omega D b_2 - \beta\lambda' b_0,\\
\lambda d_1 &= \lambda'\gamma a_1 - \varepsilon\Omega D b_1 - \beta\lambda' b_1,\\
\lambda d_2 &= \lambda'\gamma a_2 + \varepsilon b_0 \qquad - \beta\lambda' b_2,\\
\lambda d_3 &= \lambda'\gamma a_3 \quad \varepsilon b_1 \qquad - \beta\lambda' b_1,
\end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(ab)_{03} + (ab)_{12} = 0, \qquad (ab)_{01} - \Omega D(ab)_{23} = \varepsilon\lambda.$$

[1] On peut dire, plus généralement, en désignant par f et f_0 les deux formes $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ et $\alpha_0 x^2 + 2\beta_0 xy + \gamma_0 y^2$, que les caractères $\left(\frac{f}{\delta_i}\right)$ sont simultanément égaux soit aux caractères $\left(\frac{f}{\delta_i}\right)$, soit aux caractères $\left(\frac{-f}{\delta_i}\right)$.

Soient $F = 0$, $\Phi = 0$ les deux équations (Σ); la transformation T change $\Phi = 0$ en une relation singulière, $\Psi_0 = 0$, entre G, H, G', où le coefficient de G est égal, en vertu des formules (6) du n° 5, à

$$\alpha(db)_{34} + 2\beta(ad)_{34} + \gamma(ac)_{34} - 2\omega'(ab)_{34}.$$

D'ailleurs, si μ et μ' désignent deux entiers tels que $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ soit égal à 1, le système $\lambda F + \lambda'\Phi = 0$, $\mu F + \mu'\Phi = 0$ est propre et se transforme, par T, en un système propre; or, par T, $\lambda F + \lambda'\Phi = 0$ devient $H^2 - GG' - \Omega D = 0$, et $\Phi = 0$ devient $\Psi_0 = 0$: il en résulte que $F = 0$ devient $\frac{H^2 - GG' - \Omega D - \lambda'\Psi_0}{\lambda} = 0$, et $\mu F + \mu'\Phi = 0$ devient $\frac{\mu}{\lambda}(H^2 - GG' - \Omega D - \lambda'\Psi_0) + \mu'\Psi_0 = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda}[\Psi_0 + \mu(H^2 - GG' - \Omega D)] = 0.$$

D'après cela, le coefficient α_0 sera égal (au signe près) au coefficient de g, dans Ψ_0, divisé par λ, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\lambda}[\alpha(db)_{34} + 2\beta(ad)_{34} + \gamma(ac)_{34} - 2\omega'(ab)_{34}].$$

En tenant compte des relations (T), écrites plus haut, entre les c_i, d_i et les a_i, b_i, on a ainsi

$$\begin{aligned}\pm\lambda^2\alpha_0 = {} & \alpha(b_1^2 - \Omega D b_3^2) + 2\beta(\Omega D a_3 b_3 - a_1 b_1) + \gamma(a_1^2 - \Omega D a_3^2) \\ & + (ab)_{34}[2\lambda'(\beta^2 - \alpha\gamma) - 2\lambda\omega'],\end{aligned}$$

d'où l'on conclut pour les caractères quadratiques de $\pm\alpha_0$ par rapport aux diviseurs δ_i, de Ω, en se souvenant que $\beta^2 - \alpha\gamma$ et ω' sont divisibles par δ_i,

$$\left(\frac{\pm\alpha_0}{\delta_i}\right) = \left(\frac{\alpha b_1^2 - 2\beta a_1 b_1 + \gamma a_1^2}{\delta_i}\right) = \left(\frac{\alpha}{\delta_i}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela suppose que λ n'est pas divisible par δ_i : dans le cas contraire, il faudrait résoudre les formules (T) par rapport aux b_i et d_i, ce qui donnerait $\lambda' b_i$ et $\lambda' d_i$ en fonction entière des a_i et c_i, et l'on retrou-

verait le même résultat, car λ', premier à λ, ne peut être divisible par δ_i.

La proposition ainsi établie montre que deux systèmes du type (Σ_0), donnant naissance à des formes équivalentes, divisibles par Ω, ne pourront être réduits l'un à l'autre par une transformation ordinaire de degré un, si les caractères quadratiques de leurs coefficients α_0 (ou $-\alpha_0$) par rapport aux diviseurs, δ_i, de Ω sont différents. Si ces caractères coïncident, il résulte du théorème énoncé au n° **35** que les deux systèmes seront réductibles l'un à l'autre, comme étant réductibles à un même troisième.

Représentation géométrique des nombres et des formes.

36. Soit une forme algébrique binaire du sixième ordre

$$\Phi(X, Y) = a_0 X^6 + 6a_1 X^5 Y + \ldots + a_6 Y^6;$$

elle possède trois invariants absolus, et deux formes de mêmes invariants absolus sont réductibles l'une à l'autre par une substitution linéaire effectuée sur X et Y [1].

Cela posé, regardons les trois invariants absolus comme les *modules* des fonctions abéliennes liées au radical $\sqrt{\Phi(X, Y)}$, et considérons, dans l'espace, le point M qui a pour coordonnées cartésiennes ces trois modules : nous l'appellerons le *point modulaire;* il reste invariable quand on fait subir aux périodes des fonctions abéliennes une transformation ordinaire quelconque du premier degré.

37. Si les fonctions abéliennes considérées sont simplement singulières, c'est-à-dire si leurs périodes sont uniquement assujetties à vérifier une relation singulière, d'invariant donné, le point modulaire M décrit une surface algébrique, dont nous avons appris théoriquement à former

[1] Voir, par exemple, O. Bolza, *Ueber binäre Formen sechster Ordnung...* (*Mathem. Annalen*, t. XXX, p. 550-551). Le théorème ne souffre d'exception que si l'une des formes a une racine triple : ce cas ne se présentera pas dans nos applications.

l'équation, sous le nom d'équation modulaire [1] : elle ne dépend que de l'invariant donné, lequel est nécessairement d'une des formes $4N$ ou $4N+1$: nous dirons que cette surface est la *surface hyperabélienne d'invariant* $4N$ *ou* $4N+1$.

38. Si les fonctions abéliennes introduites sont doublement singulières, c'est-à-dire, si l'on impose uniquement à leurs périodes la condition de vérifier un système de deux relations singulières *données*, le point modulaire décrit évidemment *une* courbe gauche : celle-ci reste la même quand on considère, au lieu du système proposé, son transformé par une transformation ordinaire de degré 1 : car cette opération n'altère pas les modules, ni par suite le point modulaire.

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que la forme binaire liée au système proposé soit du type

$$4(ax^2+2bxy+cy^2)=4\varphi(x,y),$$

la quantité $ac-b^2$ étant impaire et $\varphi(x,y)$ proprement ou improprement primitive : nous savons (n° **30**) que tous les systèmes qui donnent naissance à la forme 4φ, ou à une forme équivalente, sont réductibles l'un à l'autre par une transformation du premier degré, et dès lors il leur correspond une seule et même courbe décrite par le point modulaire.

En d'autres termes, à l'ensemble des formes équivalentes (proprement ou non) à $4\varphi(x,y)$, c'est-à-dire à une *classe* de formes positives, divisibles par 4, et, après cette division, proprement ou improprement primitives et de déterminant impair, répond une et une seule courbe algébrique de l'espace : c'est celle que décrit le point modulaire quand les périodes abéliennes vérifient un des systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à une forme de la classe.

Des résultats analogues s'appliquent aux autres types de formes indiqués aux n^{os} **30** et **31**.

Dans d'autres cas, à une classe de formes correspondent *plusieurs* courbes algébriques : par exemple, pour une classe $4\Omega\varphi(x,y)$, où Ω

---

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. V, p. 313 et suivantes.

est impair et la forme φ positive, proprement primitive, de déterminant impair et premier à Ω, il y aura autant de courbes algébriques qu'il y a de systèmes propres, irréductibles l'un à l'autre, donnant naissance à une forme de la classe; ce nombre est fini, et nous avons appris à le déterminer au n° **55**.

On ne doit pas perdre de vue que les formes binaires positives, introduites par notre théorie, sont celles qui appartiennent à l'un ou à l'autre des types $4(ax^2+bxy+cy^2)$; $4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2$.

59. *Propriété fondamentale.* — Entre les surfaces hyperabéliennes et les courbes algébriques ainsi définies, existe une relation remarquable.

Soit $F=0$, $F_1=0$, un système propre de deux relations singulières donnant naissance à une forme $4\varphi(x,y)$ du type examiné au numéro précédent; si la forme $\varphi(x,y)$ représente *proprement* un nombre N, cela signifie, d'après la définition même de la forme 4φ, qu'une des relations singulières, $xF+yF_1=0$, du système proposé, a pour invariant $4N$, et inversement; x et y désignant des nombres premiers entre eux. Les modules de toute fonction abélienne, dont les périodes vérifient $F=0$, $F_1=0$, satisfont donc à l'équation modulaire d'invariant $4N$; et réciproquement, si les modules d'une fonction abélienne doublement singulière satisfont à cette équation, la forme quadratique binaire associée représente proprement le nombre $4N$.

En d'autres termes :

Si la forme associée à un système de deux relations singulières représente proprement un nombre Δ, la courbe algébrique correspondante (supposée unique) est sur la surface hyperabélienne d'invariant Δ, et réciproquement.

Il en est de même si, à la forme binaire considérée, correspondent plusieurs courbes de l'espace : *toutes* celles-ci sont situées sur les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont proprement représentables par la forme.

40. Comme conséquence immédiate, on voit que :

Les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance

à des formes d'une classe donnée sont toujours réductibles à un nombre fini d'entre eux, par des transformations ordinaires de degré 1; *ou, si l'on veut, les courbes qui répondent à une classe de formes donnée sont toujours en nombre fini.*

Car ces courbes sont communes à toutes les surfaces hyperabéliennes dont les invariants peuvent être représentés par la forme; elles sont dès lors en nombre fini, puisque deux surfaces hyperabéliennes d'invariants différents n'ont évidemment pas de portion commune.

Nous dirons que les courbes qui répondent à une classe donnée sont les *courbes hyperabéliennes* liées ou associées à cette classe.

41. *Intersection de deux surfaces hyperabéliennes.* — Si P est un point commun à deux surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ et Δ_1, les périodes des fonctions abéliennes dont P est le point modulaire vérifient une relation singulière d'invariant Δ, et une autre d'invariant Δ_1; il en résulte que P est sur une courbe hyperabélienne, associée à une classe de formes pouvant représenter proprement Δ et Δ_1, et tous les points de cette courbe sont également sur les deux surfaces hyperabéliennes proposées. Réciproquement, toute courbe hyperabélienne liée à une classe de formes qui représente proprement Δ et Δ_1 est située sur les deux surfaces. Ainsi :

L'intersection de deux surfaces hyperabéliennes d'invariants Δ *et* Δ_1 *se compose de toutes les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes positives, des types* $4(ax^2+bxy+cy^2)$, $4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2$, *qui peuvent représenter, à la fois et proprement, les nombres* Δ *et* Δ_1.

En dehors de ces courbes, il peut y avoir (et il y a effectivement) une intersection singulière *fixe*, qui répond au cas où la connaissance du point modulaire P ne détermine pas (à une substitution linéaire près) la forme sextique binaire $\Phi(X, Y)$, c'est-à-dire au cas où Φ a une racine triple (note du n° **36**). Les invariants absolus vérifient alors deux relations connues, c'est-à-dire que le point modulaire décrit une courbe fixe, et il est aisé de voir que celle-ci est commune à toutes les surfaces hyperabéliennes.

42. Le théorème précédent permet de *séparer* les courbes hyperabéliennes associées à deux classes différentes de formes; d'une manière plus précise : *on peut obtenir, sous forme d'équation à coefficients entiers, et sans facteur étranger, l'équation des projections sur un plan quelconque des courbes hyperabéliennes liées à une classe de formes* numériquement *donnée* (¹).

Car, pour qu'on ne pût *séparer* les courbes hyperabéliennes liées respectivement à des classes C_0, C_1, ... il faudrait que *toute* surface hyperabélienne contenant les courbes liées à l'une quelconque de ces classes contînt les courbes liées à chacune des autres; en d'autres termes, les formes des classes C_0, C_1, ... représenteraient proprement les mêmes nombres. Or il est aisé de voir, en se servant des formes réduites, que deux formes *positives* ne peuvent représenter les mêmes nombres que si elles sont équivalentes (proprement ou non), et dès lors les classes C_0, C_1, ... coïncident.

Cela posé, convenons de dire qu'une classe C_0 contient une classe C_1 si les formes de C_0 peuvent représenter proprement tous les nombres représentables proprement par les formes de C_1 : toute surface hyperabélienne contenant les courbes associées à C_1 contiendra dès lors les courbes associées à C_0.

Si une classe C n'est contenue dans aucune autre, les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont représentés proprement par les formes de C n'ont en commun que les courbes hyperabéliennes liées à C; on pourra donc toujours trouver un nombre *fini* de surfaces hyperabéliennes n'ayant en commun que ces courbes, et comme les coefficients des équations des surfaces sont des nombres entiers, il en sera de même de l'équation des projections des courbes communes sur un plan quelconque.

Si la classe C est contenue dans plusieurs autres, C_1, C_2, ..., les surfaces hyperabéliennes dont les invariants sont représentés proprement par les formes de C contiennent toutes, outre les courbes hyperabéliennes liées à C, celles qui sont liées à C_1, C_2, ... et n'en contiennent simultanément pas d'autres. Ceci prouve d'abord que les classes C_1, C_2, ... sont en nombre fini, et ensuite qu'on obtiendra,

(¹) C'est-à-dire à une classe dont on donne numériquement une des formes.

sous la forme indiquée, l'équation des projections des courbes associées à C, si l'on peut obtenir les équations analogues pour C_1, C_2, ... : or, en raisonnant sur C_1, C_2, ... comme on vient de le faire sur C, on finira évidemment par arriver à des classes qui ne sont contenues dans aucune autre, ce qui établit la proposition.

43. *Résumé.* — La théorie précédente permet ainsi d'associer à toute classe de formes quadratiques positives, de l'un des types

$$(\mathrm{C}) \qquad 4(ax^2+bxy+cy^2), \qquad 4(ax^2+bxy+cy^2)+y^2,$$

une ou plusieurs *courbes* algébriques hyperabéliennes; ce nombre, discuté aux n^{os} **30-33**, est celui des systèmes propres de deux relations singulières, irréductibles l'un à l'autre, donnant naissance à des formes de la classe.

A tout nombre de l'un des types $4N$, $4N+1$, on associe de même une *surface* algébrique, à savoir la surface hyperabélienne qui a ce nombre pour invariant.

Si les formes d'une classe C représentent un nombre Δ, la surface hyperabélienne associée à Δ contient les courbes hyperabéliennes associées à C, et réciproquement.

Ajoutons que s'il y a k représentations distinctes du nombre par une forme de la classe, les courbes sont multiples d'ordre k sur la surface et réciproquement, ainsi qu'on s'en rend compte sans difficulté. Les représentations qui correspondent aux valeurs x, y et $-x$, $-y$ ne sont pas regardées comme distinctes; de plus, si les formes de la classe admettent d transformations propres ou impropres en elles-mêmes, on doit prendre $\frac{k}{d}$ à la place de k.

Les surfaces qui répondent aux nombres Δ et Δ_1 se coupent, en dehors de courbes fixes, suivant les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes (C) qui peuvent représenter à la fois Δ et Δ_1.

De tout cela résulte une méthode intéressante, bien qu'exclusivement théorique, pour reconnaître si une forme donnée (C) peut ou non représenter un nombre donné : *la question est ramenée à reconnaître si une surface algébrique, qui ne dépend que du nombre,*

contient ou non une courbe, ou un groupe de courbes algébriques (rationnellement inséparables), qui ne dépend que de la forme.

Remarque. — Notre représentation géométrique met immédiatement en évidence certaines propriétés arithmétiques dont la démonstration directe demanderait peut-être quelques développements. Par exemple :

1° Le nombre des classes de formes quadratiques binaires positives, proprement ou improprement primitives, pouvant représenter à la fois deux nombres donnés est fini ;

2° Il n'y a pas de forme quadratique binaire positive pouvant représenter proprement trois nombres donnés, *pris au hasard*.

Groupe fuchsien d'une courbe hyperabélienne.

44. Considérons un système propre de deux relations singulières, qu'on peut toujours ([1]) supposer réduites aux types

$$(37)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ mg + nh - pg' - q = 0, \end{cases}$$

D, m, n, p, q étant des entiers, quelconques d'ailleurs, dont les quatre derniers sont sans diviseur commun.

La forme quadratique associée est ici

$$(38)\qquad \varphi(x, y) = 4Dx^2 + 4qxy + (n^2 - 4mp)y^2.$$

Proposons-nous de déterminer toutes les transformations ordinaires du premier degré qui transforment en lui-même le système (37).

Si $F = 0$, $F_1 = 0$ sont les deux relations (37), le problème revient à chercher les transformations de degré *un* qui changent respective-

([1]) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 334. Si $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ sont les deux relations données, on prendra une relation quelconque, $\lambda\Phi + \mu\Phi_1 = 0$, dont l'invariant soit pair, et on la réduira au type $h^2 - gg' - D = 0$, comme on peut le faire par une transformation d'ordre 1. Le nombre $4D$ est donc l'invariant pour d'une quelconque des relations singulières appartenant au système proposé.

ment F et F_1 en $\lambda F + \mu F_1$ et $\lambda' F + \mu' F_1$, après qu'on a chassé le dénominateur commun de g, h, g' et $h^2 - gg'$, qui figure dans les formules (6) de la transformation (Première Partie).

Dès lors la relation $xF + yF_1 = 0$ se change en

$$(\lambda x + \lambda' y)F + (\mu x + \mu' y)F_1 = 0,$$

et comme l'invariant est resté le même, on aura, *quels que soient x et y*,

$$\psi(x, y) = \psi(\lambda x + \lambda' y, \mu x + \mu' y).$$

La forme $\psi(x, y)$ se transforme donc en elle-même par la substitution $x = \lambda X + \lambda' Y$, $y = \mu X + \mu' Y$, dont le déterminant est nécessairement ± 1.

45. Bornons-nous au cas où *cette forme n'est pas d'une classe ambiguë :* ses seules transformations possibles en elle-même sont $x = \varepsilon X$, $y = \varepsilon Y$, ε désignant ± 1. On a donc

$$\lambda = \mu' = \varepsilon, \qquad \lambda' = \mu = 0.$$

On est ainsi ramené à chercher les transformations du premier degré qui reproduisent séparément les deux relations (3_7), ou les reproduisent changées simultanément de signe.

Or cette recherche a été faite d'une manière générale au n° **24**; nous avons alors déterminé toutes les transformations qui n'altèrent pas (au signe près) la relation

$$h^2 - gg' - \Omega P = 0,$$

et changent (au signe près) la relation

$$\alpha g + 2\beta h + \gamma g' - \omega = 0$$

en

$$\alpha_1 g + 2\beta_1 h + \gamma_1 g' - \omega_1 - \lambda(h^2 - gg' - \Omega P) = 0.$$

Il suffira donc, dans les formules (19), (20), (21), (22), (23), (25), de faire $\lambda = 0$; $\Omega P = D$; α, 2β, γ, ω et α_1, $2\beta_1$, γ_1, ω_1 égaux res-

pectivement à m, n, $-p$, q; $\varepsilon_0 = +1$; en ayant soin, pour tenir compte des transformations d'ordre -1, de mettre le signe $\pm$ devant le second membre de (25). On trouve ainsi, pour les entiers caractéristiques des transformations cherchées, les formules

$$(39)\quad \begin{cases} c_0 = -\varepsilon D a_2, & c_1 = \varepsilon D a_3, & c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1, \\ d_0 = \varepsilon D b_2, & d_1 = -\varepsilon D b_3, & d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1, \end{cases}$$

$$(40)\quad \begin{cases} m b_0 = -\eta_1 p a_1 + \eta_1 q a_2 + \frac{1+\eta_1}{2} n a_0, \\ m b_1 = -\eta_1 m a_0 - \eta_1 q a_3 + \frac{1-\eta_1}{2} n a_1, \\ m b_2 = -\eta_1 p a_3 + \frac{1-\eta_1}{2} n a_2, \\ m b_3 = -\eta_1 m a_2 + \frac{1+\eta_1}{2} n a_3; \end{cases}$$

les a_i sont liés par

$$(41)\quad \begin{cases} m(a_0^2 - D a_2^2) - p(a_1^2 - D a_3^2) \\ \quad + n(a_0 a_1 + D a_2 a_3) - q(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \pm m, \end{cases}$$

et les unités, positives ou négatives, ε, η_1 sont égales, puisque l'on a, en vertu de (24), $\varepsilon\eta_1 = +1$; bien entendu les valeurs des b_i données par (40) doivent être entières.

46. *Remarque.* — Le produit de deux des transformations considérées, T et T', est évidemment une transformation jouissant de la même propriété; en d'autres termes, si a_i, b_i, c_i, d_i et a'_i, b'_i, c'_i, d'_i sont les entiers caractéristiques de T et de T', et si ε et ε' sont les unités correspondantes, on aura une transformation de même nature par les formules qui donnent les entiers caractéristiques de TT', à savoir :

$$(42)\quad \begin{cases} a_i = a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b_i = a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c_i = a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d_i = a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3. \end{cases}$$

On reconnaît que l'unité ε'', qui répond à cette nouvelle transformation, est définie par $\varepsilon'' = -\varepsilon\varepsilon'$; de même si l'on désigne par θm et $\theta' m$ les seconds membres de (41) pour les deux transformations T et T' (θ et $\theta' = \pm 1$), ce second membre, pour TT', sera $\theta\theta' m$.

Il en résulte qu'on obtiendra toutes les transformations cherchées en combinant celles qui répondent à $\varepsilon = -1$ et $\theta = \pm 1$ avec une transformation particulière quelconque répondant à $\varepsilon = +1$.

47. Nous étudierons d'abord le cas où la classe de formes liée au système des deux relations singulières initiales n'admet qu'une *seule* courbe hyperabélienne associée; nous supposerons, pour fixer les idées, que ces formes sont divisibles par 4, et deviennent, après cette division, primitives et de déterminant impair [1].

En ce cas, la forme (38) est du type

$$4(\mathrm{D}x^2 + 2q'xy + py^2); \tag{43}$$

elle dérive du système de deux relations singulières

$$\left\{\begin{aligned} h^2 - gg' - \mathrm{D} &= 0, \\ g - pg' - 2q' &= 0; \end{aligned}\right. \tag{44}$$

et, pour obtenir les transformations ordinaires de degré *un* laissant ce système inaltéré, on doit faire, dans les formules (39), (40) et (41), $m = 1$, $n = 0$, $q = 2q'$. On trouve ainsi

$$\begin{array}{llll} c_0 = -\varepsilon\mathrm{D}a_2, & c_1 = \varepsilon\mathrm{D}a_3, & c_2 = -\varepsilon a_0, & c_3 = \varepsilon a_1, \\ d_0 = \varepsilon\mathrm{D}b_2, & d_1 = -\varepsilon\mathrm{D}b_3, & d_2 = \varepsilon b_0, & d_3 = -\varepsilon b_1; \end{array}$$

$$\left\{\begin{aligned} b_0 &= -\varepsilon p a_1 + 2\varepsilon q' a_2, \\ b_1 &= -\varepsilon\ a_0 - 2\varepsilon q' a_3, \\ b_2 &= -\varepsilon p a_3, \\ b_3 &= -\varepsilon\ a_2; \end{aligned}\right. \tag{45}$$

$$a_0^2 - \mathrm{D}a_2^2 - p(a_1^2 - \mathrm{D}a_3^2) + 2q'(a_0a_3 + a_1a_2) = \pm 1. \tag{46}$$

---

[1] Ou impairement pair [Note [2] du n° 30].

Les b_{ij} d'après (45), sont entiers : les a_i sont donc quatre entiers quelconques vérifiant l'équation (46), qui peut s'écrire

$$(47)\quad (a_0 + q a_3)^2 - D a_2^2 + 2q a_1 a_2 - p a_1^2 + (pD - q^2) a_3^2 = \pm 1.$$

48. Posons maintenant, comme l'a fait M. Picard dans ses belles recherches sur les transformations qui laissent invariable la relation $h^2 - gg' - D = 0$,

$$(48)\qquad g = -2\frac{\sqrt{D}}{u+v}, \qquad h = \sqrt{D}\frac{u-v}{u+v}, \qquad g' = 2\frac{\sqrt{D}uv}{u+v},$$

valeurs de g, h, g' qui vérifient identiquement cette relation.

Les modules des fonctions abéliennes qui répondent à ces périodes sont, d'après M. Picard, des fonctions uniformes de u, v, que l'éminent géomètre a désignées sous le nom de *fonctions hyperabéliennes*.

Admettons, pour un instant, que la solution $h^2 - gg' - D = 0$ soit la seule relation entre les périodes; si nous regardons g, h, g' comme les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace, nous savons (n° **6**) que toute transformation ordinaire de degré nn n'altérant pas la relation proposée change une génératrice rectiligne quelconque de la quadrique $h^2 - gg' - D = 0$ en une génératrice rectiligne de la même quadrique. Or, d'après (48), ces génératrices ont comme équations $u = \text{const.}$ pour un système, $v = \text{const.}$ pour le second; il en résulte aisément que chacune des transformations considérées change u (ou v) en une fonction linéaire de u ou de v. On trouve ainsi sans difficulté, à l'aide des formules du n° **10**, en désignant par u_1 et v_1 les nouvelles valeurs de u et v,

$$(49)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{(a_0 - a_2\sqrt{D})u - (a_1 - a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})u + (b_1 - b_3\sqrt{D})}, \\[2ex] v_1 = \dfrac{(a_0 - a_2\sqrt{D})v - (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 - b_2\sqrt{D})v - (b_1 - b_3\sqrt{D})}, \end{cases}$$

lorsque, pour la transformation considérée, la valeur de l'unité ε qui

figure dans les formules (27) du n° **10**, est égale à -1; et

$$(50)\qquad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{(a_0 + a_2\sqrt{D})v - (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})v - (b_1 - b_3\sqrt{D})}, \\[2ex] v_1 = \dfrac{(a_0 - a_2\sqrt{D})u - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{(b_0 - b_2\sqrt{D})u - (b_1 + b_3\sqrt{D})}. \end{cases}$$

lorsque $\varepsilon = +1$.

Ces formules ont déjà été données par M. Bourget [1].

49. Cela posé, revenons aux périodes doublement singulières, g, h, g', qui vérifient le système (44) :

$$(44)\qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q = 0;$$

en remplaçant, dans la deuxième équation, g, h, g' par leurs valeurs (48), on obtient, entre u et v, la relation

$$(51)\qquad \sqrt{D} + p\sqrt{D}\,uv + q'(u + v) = 0.$$

Les transformations de degré *un* n'altérant pas les relations (44) font subir à u et v les substitutions (49) et (50), où l'on remplace les b_i par leurs valeurs (45), en ayant soin de faire, dans ces valeurs, $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$, selon qu'on porte les b_i dans (49) ou dans (50). On trouve ainsi, pour $\varepsilon = -1$:

$$(52)\qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{(a_0 - a_2\sqrt{D})u - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(pa_1 - 2q'a_2 - pa_3\sqrt{D})u + (a_0 + 2q'a_3 + a_2\sqrt{D})}, \\[2ex] v_1 = \dfrac{(a_0 + a_2\sqrt{D})v + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(pa_1 - 2q'a_2 + pa_3\sqrt{D})v + (a_0 + 2q'a_3 - a_2\sqrt{D})}; \end{cases}$$

---

[1] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XII.

Par une inadvertance facile à corriger au n° 25 de son excellent Mémoire, M. Bourget indique, parmi les substitutions (49), la substitution $u_1 = (a + c\sqrt{D})u$, $v_1 = (a - c\sqrt{D})v$, où a et c forment une solution *quelconque* de l'équation $a^2 - Dc^2 = 1$. Ce résultat n'est exact que si l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ est résoluble.

et pour $\varepsilon = +1$,

$$(52\,bis)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{(a_0 + a_2\sqrt{D})v + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(pa_1 - 2q'a_2 + pa_3\sqrt{D})v + (a_0 - 2q'a_3 - a_2\sqrt{D})}, \\ v_1 = \dfrac{(a_0 - a_2\sqrt{D})u - (a_1 - a_3\sqrt{D})}{-(pa_1 - 2q'a_2 - pa_3\sqrt{D})u + (a_0 + 2q'a_3 - a_2\sqrt{D})}; \end{cases}$$

les a_i étant toujours liés par l'équation (46).

Ces deux classes de substitutions n'altèrent pas, d'après leur formation même, la relation (51) entre u et v.

D'ailleurs une solution particulière de l'équation (46) est donnée par

$$a_0 = +1, \qquad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

et la substitution (52 *bis*) correspondante sur u et v est :

$$(53)\qquad u_1 = -v, \qquad v_1 = -u$$

Il résulte de là (n° **46**) que, pour obtenir toutes les substitutions sur u et v qui répondent aux transformations de degré nn laissant inaltéré le système (44), on n'aura qu'à combiner la substitution (53) avec les substitutions (52), où les a_i sont des entiers quelconques liés par (46).

50. On déduit immédiatement de ces résultats le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne associée au système (44), ou à la classe de formes dont (43) est un représentant. Considérons en effet les modules des fonctions abéliennes dont les périodes vérifient le système (44) : ce sont, comme nous l'avons dit d'après M. Picard, des fonctions uniformes hyperabéliennes de u et de v, dont nous désignerons l'une quelconque par $\Phi(u, v)$; d'ailleurs, v étant lié à u par (51), on aura

$$\Phi(u, v) = \Phi\left(u, \frac{-\sqrt{D} - qu}{q - p\sqrt{D}u}\right),$$

et le second membre est évidemment une fonction uniforme de u, $f(u)$.

Or $\Phi(u, v)$ ne change pas quand on y remplace u et v par les u_1 et v_1 définis par (52) ou (52 *bis*), puisque cette opération équivaut à une

transformation d'ordre *un*, laquelle n'altère pas les modules; de plus, les u_1 et v_1 étant liés, comme on l'a fait observer, par la relation (51), on aura

$$\Phi(u_1, v_1) = \Phi\left(u_1, \frac{-\sqrt{D} - q' u_1}{q' + p\sqrt{D}\, u_1}\right) = \Phi(u, v) = \Phi\left(u, \frac{-\sqrt{D} - q' u}{q' - p\sqrt{D}\, u}\right),$$

c'est-à-dire que la fonction $f(u)$ ne change pas quand on opère sur u la première des substitutions (52), ou quand on remplace u par la valeur v déduite de (51).

51. En d'autres termes :

Les coordonnées d'un point de la courbe hyperabélienne associée à la forme (43), *à savoir* $4(Dx^2 + 2q'xy + py^2)$, *sont des fonctions uniformes du paramètre* u; *elles ne changent pas quand on opère sur cette variable les substitutions*

$$(54) \qquad u_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\,u - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(pa_1 - 2q'a_2 - pa_3\sqrt{D})\,u + (a_0 + 2q'a_3 + a_2\sqrt{D})},$$

les a_i *étant des entiers quelconques, assujettis seulement à vérifier l'équation*

$$(46) \qquad a_0^2 - Da_2^2 - p(a_1^2 - Da_3^2) + 2q'(a_0a_3 + a_1a_2) = \pm 1.$$

A ces substitutions il faut combiner celle qui répond à (53) *et* (51), *à savoir :*

$$(55) \qquad u_1 = -\frac{q'u + \sqrt{D}}{p\sqrt{D}\,u + q'},$$

et dont le carré est la substitution unité [1].

---

[1] *Classes ambiguës.* — Si la forme (43) appartient à une classe ambiguë, il y a, pour u, d'autres substitutions fuchsiennes que (54) et (55).

En effet, la forme (43) est alors équivalente à l'une des formes

$$4(Dx^2 + py^2), \qquad 4(2D'x^2 + 2D\,xy - py^2),$$

32. On a ainsi déterminé le groupe fuchsien de la courbe considérée; il est lié aux solutions entières de l'équation (46) qui, elle-même, mise sous la forme (47), est du type

$$U^2 - DY^2 + 2qXY - pX^2 + (pD - q^2)Z^2 = \pm 1,$$

équation qu'on rencontre, ainsi qu'on a déjà eu l'occasion de l'observer (n° **27**), dans la recherche des transformations en elle-même de la forme ternaire indéfinie $z^2 - Dx^2 - 2q'xy - py^2$: il est à remarquer que la forme $Dx^2 + 2q'xy + py^2$ est le quart de la forme (43), liée à la courbe hyperabélienne envisagée.

---

qui dérivent respectivement des deux systèmes

$$(S)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' = 0, \end{cases}$$

$$(S')\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - 2D = 0, \\ g - pg' - 2D = 0. \end{cases}$$

Dans le premier cas (S), en vertu du n° 44, la forme $Dx^2 + py^2$ admettant la transformation en elle-même $x = X$, $y = -Y$, il peut exister des transformations ordinaires de degré *un* reproduisant les deux relations (S), multipliées respectivement par $+1$ et -1 : la transformation qui change g, h, g' en $-g + h$, $-g'$ est dans ce cas; elle a ses entiers caractéristiques nuls, sauf

$$a_0 = c_2 = -1, \qquad b_1 = d_3 = +1.$$

Elle donne pour u, d'après (48), la substitution $u_1 = -u$, qu'il suffira de combiner avec les substitutions (54) et (55), pour avoir toutes celles du groupe fuchsien cherché.

Dans le second cas, (S'), on trouve de même que la transformation

$$a_0 = b_1 = b_2 = 1, \qquad c_2 = d_3 = -1, \qquad d_0 = 2D$$

(les autres a_i, b_i, c_i, d_i nuls), n'altère pas le système (S') : si $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ sont les deux équations (S'); elle change en effet Φ_1 et Φ_2 respectivement en Φ_1 et $-\Phi_2 + \Phi_1$. Elle donne, pour u, la substitution (de période *deux*)

$$u_1 = \frac{-u\sqrt{2D} - 1}{2u(D - p) - \sqrt{2D}},$$

qu'il suffira aussi de combiner avec (54) et (55).

Le groupe fuchsien qu'on vient d'obtenir rentre comme cas particulier dans ceux que M. Poincaré [1] a déduits des transformations en elle-même d'une forme ternaire indéfinie *quelconque*; M. Fricke en a étudié des variétés dans des Mémoires d'un grand intérêt [2].

53. Désignons par $4\varphi(x, y)$ la forme initiale (43) et posons

$$f(x, y, z) = z^2 - \varphi(x, y):$$

l'adjointe de f est la forme ternaire

$$F(X, Y, Z) = -DY^2 + 2q'XY - pX^2 + (pD - q'^2)Z^2,$$

en sorte que l'équation (46) s'écrit

$$(46)' \qquad (a_0 + q'a_3)^2 + F(a_1, a_2, a_3) = \pm 1.$$

Observons maintenant que l'expression (55) de u_1 rentre dans le type (54), où l'on ferait $a_0 = -q'$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$: mais, pour ces valeurs des a_i, le premier membre de (46)', au lieu d'être ± 1, est égal à $pD - q'^2$, discriminant de la forme φ, *et aussi de la forme* $f(x, y, z)$.

On peut donc dire que les substitutions du groupe fuchsien considéré sont *toutes* données par la formule (54), les a_i étant liés par l'une ou l'autre des relations

$$(48) \qquad (a_0 + q'a_3)^2 + F(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} \pm 1, \\ \pm(pD - q'^2). \end{cases}$$

D'ailleurs il suffit, comme on l'a vu, de combiner une seule des substitutions répondant à la seconde hypothèse avec toutes celles qui répondent à la première, pour avoir l'ensemble des substitutions du groupe : la relation $(a_0 + q'a_3)^2 + F(a_1, a_2, a_3) = pD - q'^2$ se rencontre également dans la recherche des transformations linéaires de la forme $f(x, y, z)$ en elle-même.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. III, p. 405.

(2) *Math. Annalen*, t. XXXVIII, XXXIX et XLII. Voir aussi de beaux travaux de M. Bianchi, *ibid.*, t. XXXVIII, XL, XLII et XLIII.

54. *Remarque I.* — On peut donner une infinité de formes aux substitutions du groupe fuchsien considéré, en remplaçant u par une fonction linéaire de cette variable; on obtient ainsi le groupe transformé du premier par une substitution linéaire.

Inversement, tous les groupes fuchsiens qui répondent à une même forme ternaire $f(x, y, z)$ sont, comme l'a montré M. Poincaré [1], et comme il est aisé de le voir directement, les transformés de l'un d'entre eux par une substitution linéaire; il en est évidemment de même si l'on remplace la forme $f(x, y, z)$ par une forme équivalente.

55. *Remarque II.* — Le produit de deux substitutions du groupe est une substitution du groupe, ce qui revient à dire que le produit de deux transformations (45) est encore une transformation du même type.

De là résultent sans difficulté des formules qui permettent, étant données deux solutions entières de l'équation (46), d'en déduire une troisième : elles coïncident avec les formules classiques pour la composition de deux des transformations semblables de la forme $f(x, y, z)$, et il est inutile d'insister ici sur ce point.

56. Cela posé, considérons deux formes binaires $\varphi(x, y)$, $\varphi_1(x, y)$ positives, primitives, et de discriminants impairs [2]; supposons que les formes ternaires

$$f = z^2 - \varphi(x, y) \qquad \text{et} \qquad f_1 = z^2 - \varphi_1(x, y)$$

soient proprement ou improprement équivalentes, ce qui exige l'égalité des discriminants des deux formes φ et φ_1. En vertu de la remarque du n° 54, les groupes fuchsiens des courbes associées aux deux formes 4φ et $4\varphi_1$ sont transformés l'un de l'autre par une substitution linéaire, ou, sous une autre forme, ces deux courbes hyperabéliennes sont de même genre et se correspondent point par point.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 419.

(2) Ou impairement pairs.

57. Cherchons maintenant à quelles conditions les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ seront équivalentes.

Soit posé

$$\varphi = Dx^2 + 2q'xy + py^2, \qquad \varphi_1 = D_1x^2 + 2q'_1xy + p_1y^2,$$
$$\Delta = pD - q'^2 = p_1D_1 - q'^2_1,$$

on a, pour les adjointes F et F_1, de f et f_1,

$$(56) \qquad \begin{cases} F = -DY^2 + 2q'XY - pX^2 + \Delta Z^2, \\ F_1 = -D_1Y^2 + 2q'_1XY - p_1X^2 + \Delta Z^2. \end{cases}$$

Si f et f_1 sont équivalentes, leurs adjointes le sont également, et appartiennent dès lors au même genre : par suite, en désignant par d_i un diviseur premier quelconque de Δ, discriminant de f et f_1, les caractères quadratiques $\left(\frac{F}{d_i}\right)$, $\left(\frac{F_1}{d_i}\right)$ seront identiques, c'est-à-dire qu'on aura

$$\left(\frac{DY^2 - 2q'XY - pX^2}{d_i}\right) = \left(\frac{D_1Y_1^2 - 2q'_1X_1Y_1 + p_1X_1^2}{d_i}\right),$$

quels que soient X, Y, X_1, Y_1. En d'autres termes, les nombres représentés par les deux formes binaires

$$DY^2 + 2q'XY + pX^2, \qquad D_1Y^2 + 2q'_1XY + p_1X^2,$$

c'est-à-dire par φ et φ_1, ont même caractère quadratique par rapport à chacun des diviseurs du déterminant commun.

On en conclut que les deux formes φ et φ_1 appartiennent au même genre.

En effet :

1° Si elles sont toutes deux improprement primitives, la propriété précédente suffit pour que le genre soit le même;

2° Si l'une est proprement et l'autre improprement primitive, le déterminant commun, $-\Delta$, est de la forme $4N + 1$, et la propriété suffit encore;

3° Reste donc seulement le cas où les deux formes seraient proprement primitives; elles seront du même genre si, pour tous les nombres impairs n, représentés par φ ou par φ_1, la quantité $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ a la même valeur, en supposant Δ (qui est impair) de la forme $4N+1$.

Or on peut toujours supposer les premiers coefficients, D et D_1, de φ et φ_1, impairs, et les seconds, p et p_1 pairs; et pour que φ ou φ_1 représente un nombre impair, il faut et il suffit que x soit impair.

Cela posé, on a identiquement, puisque les formes $z^2-\varphi$ et $z^2-\varphi_1$ sont équivalentes,

$$\begin{aligned} z^2-\varphi(x,y) = {} & (\lambda''x+\mu''y+\nu''z)^2 \\ & -\varphi_1(\lambda x+\mu y+\nu z,\ \lambda' x+\mu' y+\nu' z), \end{aligned}$$

d'où

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x,y) = {} & \varphi_1(\lambda x+\mu y+\nu z,\ \lambda' x+\mu' y+\nu' z) \\ & +z^2-(\lambda'' x+\mu'' y+\nu'' z)^2. \end{aligned}\right.$$

Donnons à x une valeur impaire quelconque; si l'on peut déterminer des valeurs entières de y et de z telles que la différence de carrés

$$z^2-(\lambda''x+\mu''y+\nu''z)^2$$

soit paire (et par suite divisible par 4), l'identité précédente montre qu'un nombre impair représentable par φ sera égal à un nombre impair représentable par φ_1, à un multiple près de 4, et la quantité $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ aura même valeur pour les deux formes. Or pour que l'on *ne puisse* rendre $z^2-(\lambda''x+\mu''y+\nu''z)^2$ pair, x ayant une valeur impaire, il faut évidemment que λ'' soit impair, μ'' pair et ν'' impair : je dis que ce cas ne peut se présenter. L'identité (57) donne en effet, si l'on y fait successivement les indéterminées nulles à l'exception d'une seule,

$$\begin{aligned} D &= -\lambda''^2+\varphi_1(\lambda,\lambda'), \\ p &= -\mu''^2-\varphi_1(\mu,\mu'), \\ 0 &= -\nu''^2+\varphi_1(\nu,\nu')+1. \end{aligned}$$

Mais, pour D et λ'' impairs, la première de ces relations exige que λ

soit pair; la seconde, pour p et μ'' pairs, exige que μ soit pair; la troisième, pour ν'' impair, exige que ν soit pair. Or λ, μ, ν ne peuvent être pairs simultanément, puisque le déterminant (λ, μ', ν'') est égal à ± 1 (¹).

Donc enfin, si les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes (proprement ou non), les formes φ et φ_1 appartiennent au même genre.

58. Réciproquement, si φ et φ_1 sont du même genre, les formes $f = z^2 - \varphi$ et $f_1 = z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes.

Car les deux formes adjointes (56), F et F_1, ont alors même caractère quadratique par rapport à chacun des diviseurs du discriminant Δ, commun aux deux formes f et f_1. D'ailleurs F et F_1 sont proprement primitives, car Δ est impair, et D, q', p, d'une part, D_1, q'_1, p_1, d'autre part, n'ont aucun facteur commun, puisque φ et φ_1 sont primitives : de tout cela il résulte que les formes ternaires f et f_1, dont F et F_1 sont les adjointes, appartiennent au même genre. Leur déterminant Δ étant impair, par hypothèse, et le plus grand commun diviseur, 1, des coefficients des adjointes F et F_1 étant premier à Δ, on en conclut, par un théorème connu (²), qu'elles appartiennent à la même classe.

59. Voici donc la conclusion, que nous retrouvons d'ailleurs plus loin par une autre méthode :

Considérons les classes de formes quadratiques binaires, posi-

---

(¹) Comme conséquence, on peut trouver des entiers x, y, z premiers entre eux, dont le premier est impair, annulant $z - (\lambda''x + \mu''y + \nu''z)$; sous une autre forme, les deux formes φ et φ_1, en vertu de (57), peuvent représenter proprement un même nombre impair.

(²) *Voir*, par exemple, Bachmann, *Zahlentheorie*, 4ᵉ Partie, p. 251. L'énoncé de cet important théorème, dû à Arn. Meyer, est celui-ci : *Deux formes ternaires proprement primitives, indéfinies, d'invariants impairs et premiers entre eux, appartiennent à la même classe si elles appartiennent au même genre.* Le théorème est encore vrai (Meyer, *Crelle*, t. CVIII) si les deux invariants sont, l'un ou l'autre ou tous deux, impairement pairs et n'ont pas de diviseur commun impair. [Note (²) du nº 30.]

tives, primitives, de même déterminant impair (¹), *qui font partie d'un même* GENRE, *et soient* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *des formes appartenant respectivement à chacune de ces classes : les courbes hyperabéliennes associées aux classes de formes* $\{\varphi_1, \{\varphi_2, \ldots$ *sont du même* GENRE, *et se correspondent point par point* (²).

60. La même théorie s'applique aux formes $\{\varphi$, lorsque la forme φ, au lieu d'être proprement primitive, ne l'est qu'après division par un facteur impair, Ω.

En ce cas, les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes de la même classe que $\{\varphi$ ne peuvent se réduire à un seul d'entre eux, et l'on n'a plus le droit de supposer $m = 1$, comme on l'a fait au n° **47**.

Soit en ce cas

$$(58)\qquad \begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ mg + 2nh - pg - 2q' = 0 \end{cases}$$

un système donnant naissance à une forme

$$(59)\qquad \{\varphi(x, y) = \{[Dx^2 + 2q'xy + (n^2 + mp)y^2]$$

du type considéré : par hypothèse, D, $2q'$, $n^2 - mp$ ont pour plus grand commun diviseur le nombre impair positif Ω; on admet en

(¹) Ou impairement pair : la démonstration, pour ce cas, se calque sur la précédente; on s'appuie sur le théorème de Arn. Meyer cité dans la dernière note. De même, si les formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$, de déterminant impairement pair, sont équivalentes, on établit que φ et φ_1 sont du même genre : la démonstration du n° 57 reste, en effet, applicable; il suffit d'observer que, en vertu de (57), φ et φ_1 peuvent représenter respectivement deux nombres impairs dont la différence est un multiple de 8.

(²) *Classes ambiguës.* — Si le genre contient une classe ambigue, φ_0, la courbe C_0 associée à la classe $\{\varphi_0$ ne correspond pas point par point aux courbes $C_1, C_2, \ldots$ associées à $\{\varphi_1, \{\varphi_2, \ldots$: car son groupe fuchsien contient une substitution fondamentale qui n'a pas sa correspondante dans les autres groupes (note du n° 51). On en conclut aisément qu'à un point de C_0 répondent deux points de C_1, et, à un point de C_1, un point de C_0.

outre que le quotient par Ω^2 de la quantité $J = D(n^2 + mp) - q^2$ est premier avec Ω.

Pour trouver le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne qui correspond au système (58), nous avons, comme plus haut, à étudier les transformations de degré nn, données par les formules (39), (40) et (41), qui laissent ce système invariable.

Supposons, dans les formules (40), $\varepsilon = -1$: le cas de $\varepsilon = +1$ donnerait lieu à une observation pareille à celle du n° **46**. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} mb_0 &= pa_1 - qa_2, \\ mb_1 &= ma_0 + qa_3 + 2n'a_1, \\ mb_2 &= pa_3 + 2n'a_2, \\ mb_3 &= ma_2; \end{aligned}$$

les a_i vérifiant l'équation

$$\begin{aligned} m(a_0^2 - Da_2^2) - p(a_1^2 - Da_3^2) + 2n'(a_0a_1 + Da_2a_3) \\ + 2q'(a_0a_3 + a_1a_2) = \pm m. \end{aligned}$$

On peut, par la méthode suivie au n° **19**, exprimer les a_i et b_i en fonction linéaire, à coefficients entiers, de nouvelles indéterminées : supposons pour cela, comme nous en avons le droit (n° **34**), m et $2q'$ premiers entre eux, et soient μ et ν deux entiers tels que

$$m\mu + 2q'\nu = 1;$$

on aura :

$$\begin{aligned} a_0 &= t, & b_0 &= -2q'x + p\mu z, \\ a_1 &= z, & b_1 &= t + 2n'\mu z + 2q'y, \\ a_2 &= -mx + p\nu z, & b_2 &= py + 2n'x, \\ a_3 &= -2n'\nu z + my, & b_3 &= -mx + p\nu z; \end{aligned}$$

les nouvelles indéterminées, x, y, z, t, seront liées par la relation

$$\begin{aligned} (t + n'\mu z + q'y)^2 - z(2q'x + p\mu z) - D(mx + p\nu z)^2 \\ + D(py + 2n'x)(my - 2n'\nu z) - (n'\mu z + q'y)^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

On en conclut, comme on l'a fait précédemment, que le groupe fuchsien cherché est celui qui correspond aux transformations en elle-même de la forme ternaire ayant pour adjointe

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &-z(-2q'x+p\mu z)-\mathrm{D}(mx+p\nu z)^2\\ &-\mathrm{D}^2(py+2n'x)(my-2n'\nu z)-(n'\mu z+q'y)^2. \end{aligned}\right.$$

On trouve que cette forme est

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z)=\;&z^2(1-\tfrac{1}{4}\mathrm{D}\nu^2n'^2)-\mathrm{D}m^2x^2-p(\mu+\mathrm{D}p\nu^2)y^2\\ &+2n'(-\mu-2p\mathrm{D}\nu^2)yz+\tfrac{1}{4}\mathrm{D}mn'\nu zx\\ &-2(q'-\mathrm{D}mp\nu)xy. \end{aligned}\right.$$

Elle a pour déterminant la quantité $\mathrm{J}=\mathrm{D}(n'^2+mp)-q'^2$, introduite plus haut; le plus grand commun diviseur des coefficients de son adjointe (60) est Ω, comme on s'en assure aisément, en se souvenant que m, $2n'$, p, $2q'$ n'ont pas de facteur commun, que m et $2q$ sont premiers entre eux, et que D, q', n'^2+mp ont Ω pour plus grand commun diviseur.

D'ailleurs, la forme f peut s'écrire

$$f(x,y,z)=-\mathrm{D}(mx+p\nu z+2n'\nu z)^2+2y\frac{q'}{m}(mx-p\nu y+2n'\nu z)$$
$$+\left(z-\frac{n'}{m}y\right)^2-\frac{y^2}{m^2}(n'^2+mp);$$

elle se transforme donc, par la substitution fractionnaire de déterminant 1,

$$\left\{\begin{aligned} mx+p\nu y+2n'\nu z&=\xi,\\ \frac{y}{m}&=-\eta,\\ z-\frac{n'}{m}y&=\zeta, \end{aligned}\right.\quad\text{ou}\quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{1}{m}[\xi-mp\nu\eta+2n'\nu(\zeta-n'\eta)],\\ y&=-m\eta,\\ z&=\zeta-n'\eta. \end{aligned}\right.$$

en la forme

$$(62)\quad \zeta^2-\mathrm{D}\xi^2-2q'\xi\eta-(n'^2+mp)\eta^2,\quad \text{c'est-à-dire}\quad \zeta-\varphi(\xi,\eta)$$

Les deux formes (61) et (62) appartiennent donc au même genre, d'après un beau résultat de Stephen Smith [1]; il en résulte, en vertu du théorème de Meyer déjà employé [2], qu'elles sont aussi de la même classe, c'est-à-dire équivalentes l'une à l'autre.

On en conclut que le groupe fuchsien de la courbe hyperabélienne liée au système (58) est le transformé, par une substitution linéaire, de celui qui dérive des transformations en elle-même de la forme (62), c'est-à-dire de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$: c'est le résultat obtenu dans le cas particulier étudié d'abord; il conduit aux mêmes conséquences.

61. Par suite :

Soit φ une forme binaire positive, divisible par un nombre impair, Ω, et, après cette division, proprement primitive et de déterminant impair, premier à Ω :

1° *Toutes les courbes hyperabéliennes associées à la classe de formes dont 4φ est un représentant sont du même genre et se correspondent point par point;*

2° *Elles correspondent aussi point par point aux courbes hyperabéliennes associées à toute classe $4\varphi_1$, pour laquelle la forme binaire positive φ_1 a même déterminant, même diviseur Ω et même genre que la forme φ* [3].

Car on établit, comme précédemment, que, si φ_1 remplit ces conditions, les deux formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes, et réciproquement.

62. Ces résultats établissent une liaison remarquable entre les courbes hyperabéliennes associées à deux classes de formes qui appartiennent au même genre; on va les compléter en les rattachant aux transformations singulières du premier ordre des périodes, dans le cas du moins des formes primitives, c'est-à-dire de $\Omega = 1$ ou 2.

Supposons, pour fixer les idées, $\Omega = 1$; soient φ et φ_1 deux formes

---

(1) *Philos. Transactions*, t. CLVII, p. 275.

(2) Note du n° 58.

(3) On suppose que φ_1, après division par Ω, est proprement ou improprement primitive.

proprement primitives, positives, de même déterminant impair et du même genre; les formes $z^2 - \varphi$ et $z^2 - \varphi_1$ sont équivalentes et, dès lors (n° **37**, note), φ et φ_1 représentent proprement un même nombre, D. Elles peuvent donc s'écrire :

$$\varphi = Dx^2 + 2q'xy + py^2, \qquad \varphi_1 = Dx^2 + 2q'_1xy + p_1y^2,$$

et les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance aux classes représentées par $\{\varphi$ et $\{\varphi_1$ sont réductibles respectivement aux types

$$\begin{cases} h^2 - gg' - D = 0, \\ g - pg' - 2q' = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} h_1^2 - g_1g'_1 - D = 0, \\ g_1 - p_1g'_1 - 2q'_1 = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on pose, comme au n° **48**,

$$g = -\frac{2\sqrt{D}}{u+v}, \qquad h = \sqrt{D}\frac{u-v}{u+v}, \qquad g' = 2\sqrt{D}\frac{uv}{u+v},$$

$$g_1 = -\frac{2\sqrt{D}}{u'+v'}, \qquad h_1 = \sqrt{D}\frac{u'-v'}{u'+v'}, \qquad g'_1 = 2\sqrt{D}\frac{u'v'}{u'+v'},$$

aux variables u et u' répondent, comme on l'a vu, deux groupes fuchsiens, transformés l'un de l'autre par une substitution linéaire. La correspondance point par point entre les deux courbes hyperabéliennes associées respectivement aux classes $\{\varphi$ et $\{\varphi_1$ s'établit donc en posant

$$u' = \frac{Au + B}{Eu + F},$$

A, B, E, F désignant des constantes : la forme même (54) des deux groupes fuchsiens relatifs à u et u' montre que A, B, E, F sont du type $\lambda + \mu\sqrt{D}$, λ et μ étant entiers. On a ainsi, en remplaçant u et u' par leurs valeurs en fonction des périodes,

$$-\frac{h_1 + \sqrt{D}}{g'_1} = \frac{-(A_0 + A_1\sqrt{D})(h + \sqrt{D}) + (B_0 + B_1\sqrt{D})g}{-(E_0 + E_1\sqrt{D})(h + \sqrt{D}) + (F_0 + F_1\sqrt{D})g}$$

$$= -\frac{g'_1}{h_1 - \sqrt{D}} = \frac{(A_0 + A_1\sqrt{D})g' + (B_0 + B_1\sqrt{D})(h - \sqrt{D})}{-(E_0 + E_1\sqrt{D})g' + (F_0 + F_1\sqrt{D})(h - \sqrt{D})},$$

les A_i, B_i, E_i, F_i désignant des entiers.

On a maintenant le droit de changer, dans ces relations, le signe de $\sqrt{D}$, que rien ne fixe *a priori :* on obtient ainsi, entre les périodes, des relations de la forme

$$\mathfrak{P}_1 g_1 + \mathfrak{P}_2 h_1 = \mathfrak{P}_3, \qquad \mathfrak{P}_1 h_1 + \mathfrak{P}_2 g'_1 = \mathfrak{P}_4,$$
$$\mathfrak{Q}_1 g_1 + \mathfrak{Q}_2 h_1 = \mathfrak{Q}_3, \qquad \mathfrak{Q}_1 h_1 + \mathfrak{Q}_2 g'_1 = \mathfrak{Q}_4,$$

$\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_i$ désignant un système de périodes simultanées en g, h, g'. Or ces relations caractérisent une transformation (n° **7**), faisant passer des périodes g, h, g' aux périodes g_1, h_1, g'_1 : cette transformation doit être du premier degré, puisque la correspondance entre les points des deux courbes hyperabéliennes considérées, c'est-à-dire entre les points modulaires liés aux deux systèmes de périodes, est univoque; elle doit être singulière, car une transformation ordinaire d'ordre *un* n'altérerait pas le point modulaire.

Des considérations analogues s'appliquent au cas où φ et φ_1 seraient, l'une ou l'autre ou toutes deux, improprement primitives, en appartenant toujours au même genre.

65. On arrive ainsi à cette conclusion, que nous retrouverons plus loin, *par une méthode plus rigoureuse* et à l'abri de toute objection :

Soient φ_1, φ_2, ... des formes binaires positives, primitives, de même déterminant impair (¹), *n'appartenant pas à la même classe, mais appartenant au même genre : les systèmes propres de deux relations singulières qui donnent naissance aux classes dont $4\varphi_1$, $4\varphi_2$, ... sont les représentants, sont réductibles à un seul d'entre eux par des transformations* SINGULIÈRES *du premier degré.*

La proposition ne s'applique pas aux formes *non primitives*, parce que les courbes hyperabéliennes qui sont associées à une classe non primitive ne sont pas rationnellement séparables; la transformation qui établit la correspondance univoque entre les points de deux de ces courbes n'est donc pas nécessairement du premier degré.

(¹) Ou impairement pair [note (¹) du n° 59].

64. Cette induction nous conduit à étudier les transformations singulières du premier degré pour les fonctions abéliennes doublement singulières : nous n'avons fait cette étude que pour les fonctions simplement singulières [1].

Transformations singulières du premier degré.

65. Supposons que les périodes g, h, g' vérifient deux relations singulières $F = 0$, $F_1 = 0$, formant un système propre. Une transformation singulière quelconque, *faisant passer* [2] *des périodes* G, H, G′ *aux périodes* g, h, g', suppose entre celles-ci *une* relation singulière; dans le cas actuel, si λ et μ désignent deux entiers premiers entre eux, à toute relation $\lambda F + \mu F_1 = 0$, répond un ensemble de transformations singulières que nous avons appris à former.

Supposons que le système $F = 0$, $F_1 = 0$ soit réductible au type

$$(44) \qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q' = 0;$$

pour obtenir toutes les transformations singulières de degré un qui correspondent à la relation singulière

$$\lambda(h^2 - gg' - D) + \mu(g - pg' - 2q') = 0,$$

il faut se donner les *indices* l et k, c'est-à-dire deux entiers vérifiant la relation

$$(63) \qquad l^2 - k^2(D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2) = -1;$$

la transformation correspondante du premier degré, d'indices l et k, est alors déterminée, à une transformation *ordinaire* près de ce degré;

---

(1) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 313 et suiv.

(2) *Voir* la *Théorie des transformations singulières* dans ce Journal, 5e série, t. VI, p. 281-326.

ses entiers caractéristiques sont définis par les formules (n° **13**)

$$\begin{array}{llll}
a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\
b_0 = 0, & b_1 = 1 + \tau'\lambda, & b_2 = \sigma'\lambda, & b_3 = k\lambda, \\
c_0 = 0, & c_1 = \tau'\mu, & c_2 = 1 + \sigma'\mu, & c_3 = k\mu, \\
d_0 = \tau' p\mu - \sigma'(\mathrm{D}\lambda + 2q'\mu), & & d_1 = k(\mathrm{D}\lambda + 2q'\mu), & \\
d_2 = kp\mu, & & d_3 = l, &
\end{array}$$

où σ' et τ' sont des entiers quelconques, satisfaisant à l'équation

$$l - 1 = \sigma'\mu + \tau'\lambda.$$

Or, λ et μ étant premiers entre eux, on trouvera des entiers, λ' et μ', tels qu'on ait

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = 1; \tag{64}$$

et dès lors on pourra prendre

$$\sigma' = (l-1)\mu', \qquad \tau' = (l-1)\lambda';$$

le Tableau précédent s'écrit alors

$$(65)\quad \left\{\begin{array}{llll}
a_0 = 1, & a_1 = 0, & a_2 = 0, & a_3 = 0, \\
b_0 = 0, & b_1 = \lambda\lambda' l + \mu\mu', & b_2 = (l-1)\lambda\mu', & b_3 = k\lambda, \\
c_0 = 0, & c_1 = (l-1)\lambda'\mu, & c_2 = \mu\mu' l + \lambda\lambda', & c_3 = k\mu, \\
d_0 = (l-1)[p\mu\lambda' - \mu'(\mathrm{D}\lambda + 2q'\mu)], & & d_1 = k(\mathrm{D}\lambda + 2q'\mu), & \\
d_2 = kp\mu, & & d_3 = l. &
\end{array}\right.$$

On obtient ainsi, en faisant varier λ et μ, une infinité de transformations singulières de degré *un*, pour les fonctions abéliennes considérées; on voit que, pour définir une quelconque d'entre elles, il faut se donner en réalité les trois nombres, que nous appellerons ses *indices*, l, $k\lambda$ et $k\mu$, vérifiant la relation (63) :

$$l^2 - \mathrm{D}k^2\lambda^2 - 2q'k\lambda . k\mu + pk^2\mu^2 = +1.$$

c'est-à-dire qu'il faut se donner une solution z, x, y de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1,$$

en désignant toujours par $4\varphi(x, y)$ la forme $4(Dx^2 + 2q'xy + py^2)$, associée au système (44) : k sera le plus grand commun diviseur de x et de y; les quotients de x et y par k seront λ et μ; enfin z sera l.

Remarque. — Pour définir une transformation singulière, T, du premier degré, on doit connaître, avec les indices l, $k\lambda$, $k\mu$, les deux relations singulières (44); on peut d'ailleurs faire subir à celles-ci une transformation singulière quelconque Σ, de degré *un* n'altérant pas leur système : cela revient à faire suivre T de Σ. Or on voit de suite, soit directement, soit en se reportant à des formules antérieurement établies par nous [1], que la transformation $T\Sigma$ a pour indices l, $k\lambda$, $k\mu$, ou l, $-k\lambda$, $-k\mu$, si Σ est d'ordre $+1$; et ces mêmes quantités, changées de signe simultanément, si Σ est d'ordre -1.

De même, si l'on fait précéder T d'une transformation ordinaire de degré 1, S, les indices de ST sont l, $k\lambda$, $k\mu$ ou $-l$, $-k\lambda$, $-k\mu$.

Il résulte aisément de là que les transformations singulières de degré *un* et d'indices respectivement égaux à εl, $\eta_1 k\lambda$, $\eta_1 k\mu$, ε et η_1 désignant ± 1, font correspondre à des périodes g, h, g', vérifiant les relations (44), quatre systèmes de périodes équivalents, c'est-à-dire donnant un même point modulaire.

66. Cela posé, soient T et T_1 deux transformations singulières du premier degré, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$: elles font correspondre respectivement aux périodes g, h, g' des périodes G, H, G' et G_1, H_1, G_1' : dans quel cas ces deux derniers systèmes de périodes donneront-ils le même point modulaire?

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une transformation ordinaire, S_0, fasse passer de G, H, G' à G_1, H_1, G_1' : alors la transformation de degré *un*, $T^{-1}S_0T_1$, fera passer des périodes g, h, g' aux *mêmes* périodes g, h, g' : ce sera donc ce que nous avons appelé une *multiplication complexe du premier degré*, que nous désignerons

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. VI, nos 148-150.

par Θ. On a ainsi

$$S_0 T_1 = T\Theta. \tag{66}$$

Or les indices de $S_0 T_1$ sont, à un même facteur ± 1 près, les mêmes que ceux de T_1, comme on vient de le voir; calculons directement ceux de $T\Theta$.

Les entiers caractéristiques a_i, b_i, c_i, d_i de T sont donnés par les formules (65); ceux de la multiplication complexe Θ, de degré uu, pour le cas des deux relations singulières (41), le sont par les formules suivantes [1] :

$$(67)\quad \begin{cases} a'_0 = \theta, & a'_1 = \rho, & a'_2 = +\tau, & a'_3 = \sigma, \\ b'_0 = p\rho, & b'_1 = \theta, & b'_2 = -p\sigma, & b'_3 = -\tau, \\ c'_0 = -2q'\rho + D\tau, & c'_1 = D\sigma, & c'_2 = \theta + 2q'\sigma, & c'_3 = \rho, \\ d'_0 = -Dp\sigma, & d'_1 = 2q'\rho - D\tau, & d'_2 = p\rho, & d'_3 = \theta + 2q'\sigma; \end{cases}$$

θ, ρ, τ, σ désignent des entiers liés par l'équation

$$\theta^2 + 2q'\theta\sigma - p\rho^2 + 2q'\rho\tau - D\tau^2 + pD\sigma^2 = \pm 1,$$

qui s'écrit

$$(68)\quad (\theta + q'\sigma)^2 - D\tau^2 + 2q'\rho\tau - p\rho^2 + (pD - q'^2)\sigma^2 = \pm 1,$$

et qui a été déjà rencontrée au n° **47**, avec d'autres notations.

Or, les entiers caractéristiques a''_i, b''_i, c''_i, d''_i de $T\Theta$, sont fournis par les formules [2]

$$(69)\quad \begin{cases} a''_i = a_i a'_0 + b_i a'_1 + c_i a'_2 + d_i a'_3, \\ b''_i = a_i b'_0 + b_i b'_1 + c_i b'_2 + d_i b'_3, \\ c''_i = a_i c'_0 + b_i c'_1 + c_i c'_2 + d_i c'_3, \\ d''_i = a_i d'_0 + b_i d'_1 + c_i d'_2 + d_i d'_3. \end{cases}$$

---

(1) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 339; nous avons changé τ en $-\tau$.

(2) *Ibid.*, p. 293.

et les indices l'', $k''\lambda''$, $k''\mu''$ de $T\Theta$ ont pour expression [1] :

$$(70)\qquad \left\{\begin{aligned} l'' &= (a''d'')_{03} + (a''d'')_{12},\\ k''\mu'' &= (a''c'')_{03} + (a''c'')_{12},\\ k''\lambda'' &= (a''b'')_{03} + (a''b'')_{12}. \end{aligned}\right.$$

Il suffit maintenant de porter dans (70) les valeurs (69) des a'', b'', c'', d'', calculées elles-mêmes à l'aide de (65) et (67), pour obtenir l'', $k''\lambda''$, $k''\mu''$, qui, d'après (66), sont égaux à l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$, au même facteur ± 1 près.

On trouve ainsi les expressions

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} l_1 = {} & l(\theta^2 + 2q'\theta\sigma + p\rho^2 + D\tau^2 - 2q'\tau\rho + pD\sigma^2)\\ & + k\lambda(2q'\theta\rho - 2D\theta\tau + 2pD\rho\sigma - 2Dq'\sigma\tau)\\ & + k\mu(2p\theta\rho + 2pD\sigma\tau + 2pq'\rho\sigma - 2q'\theta\tau - 4q'^2\sigma\tau),\\ k_1\lambda_1 = {} & l(-2\theta\tau - 2p\rho\sigma)\\ & + k\lambda(\theta^2 + D\tau^2 - p\rho^2 - pD\sigma^2)\\ & + k\mu(-2p\theta\sigma - 2p\rho\tau - 2pq'\sigma^2 + 2q'\tau^2),\\ k_1\mu_1 = {} & l(2\theta\rho - 2D\sigma\tau + 4q'\rho\sigma)\\ & + k\lambda(2D\theta\sigma - 2D\rho\tau + 2q'\rho^2 - 2q'D\sigma^2)\\ & + k\mu(\theta^2 + 4q'\theta\sigma + 4q'^2\sigma^2 - D\tau^2 + p\rho^2 - pD\sigma^2). \end{aligned}\right.$$

67. On reconnaît, dans ces formules, celles qui donnent *des* transformations en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$, c'est-à-dire $z^2 - Dx^2 - 2q'xy - py^2$: elles ne fournissent pas *toutes* ces transformations, mais seulement celles qui sont liées aux solutions en nombres entiers de l'équation :

$$(68)\qquad (\theta + q'\sigma)^2 - F(\rho, \tau, \sigma) = \pm 1,$$

F désignant, comme d'habitude, l'adjointe de $z^2 - \varphi(x, y)$.

En d'autres termes, si l, $k\lambda$, $k\mu$ désigne une solution particulière

(1) Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 283 et 286.

de l'équation

$$l^2 - k^2 \varphi(\lambda, \mu) = +1,$$

on en déduit, par les formules (71), qui donnent des transformations en elle-même de la forme $l^2 - k^2 \varphi(\lambda, \mu)$, une infinité d'autres solutions; soit $l_1, k_1\lambda_1, k_1\mu_1$ l'une de celles-ci : les deux transformations singulières du premier degré d'indices $l, k\lambda, k\mu$ et $l_1, k_1\lambda_1, k_1\mu_1$ sont réductibles l'une à l'autre à l'aide d'une multiplication complexe, et les deux systèmes de périodes G, H, G′ et G_1, H_1, G'_1, qu'elles font respectivement correspondre à g, h, g', sont équivalents, c'est-à-dire donnent un même point modulaire.

68. En vertu de la remarque du n° **63**, les transformations d'indices $l, k\lambda, k\mu$ et $l, -k\lambda, -k\mu$, font également correspondre à g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents : or, si nous posons pour un instant

$$l_1 = l, \qquad k_1\lambda_1 = -k\lambda, \qquad k_1\mu_1 = -k\mu,$$

ces quantités vérifient les équations (71), où les premiers membres seraient multipliés par $p\mathrm{D} - q'^2$, et où l'on ferait, dans les seconds membres, $\rho = \tau = 0$, $\sigma = 1$, $\theta = -q'$. Ces dernières valeurs satisfont d'ailleurs à la relation

$$(72) \quad (\theta + q'\sigma)^2 - \mathrm{D}\tau^2 + 2q'\rho\tau - p\rho^2 + (p\mathrm{D} - q'^2)\sigma^2 = p\mathrm{D} - q'^2,$$

dont le deuxième membre est le discriminant de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$. Si donc $l_1, k_1\lambda_1, k_1\mu_1$ est une solution de l'équation

$$l^2 - k^2 \varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

déduite de la solution $l, k\lambda, k\mu$ par une des transformations en elle-même de la forme $l^2 - k^2 \varphi(\lambda, \mu)$, qui dérivent d'une solution de l'équation (72), les transformations singulières du premier degré d'indices $l, k\lambda, k\mu$ et $l_1, k_1\lambda_1, k_1\mu_1$ font correspondre aux périodes g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents.

69. Tous ces résultats s'étendent, sans autre difficulté que la longueur des calculs, au cas où le système initial de deux relations singu-

lières est réductible au type

$$h^2 - gg' - D = 0, \qquad \alpha g + \beta h + \gamma g' - \omega = 0,$$

avec la seule hypothèse que β et ω soient pairs.

70. Convenons de dire que deux transformations singulières du premier degré sont équivalentes ou non, selon qu'elles font ou non correspondre aux périodes g, h, g' deux systèmes de périodes équivalents entre eux, c'est-à-dire donnant le même point modulaire.

De même, convenons de dire que deux solutions en nombres entiers de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1 \tag{73}$$

sont équivalentes ou non, selon que l'une se déduit ou non de l'autre par une des transformations *principales* en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$: par transformations principales, nous entendons celles qui dérivent, suivant la théorie générale classique, des solutions en nombres entiers de l'une ou l'autre des équations

$$U^2 + F(X, Y, Z) = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm \Delta \end{cases},$$

Δ étant le discriminant de $\varphi(x, y)$ et F l'adjointe de $z^2 - \varphi$.

Les solutions z, x, y et $-z, -x, -y$ seront également dites *équivalentes*.

Cela posé, les résultats qu'on vient d'obtenir s'énoncent ainsi :

Soit S un système de deux relations singulières donnant naissance à une forme $4\varphi(x, y)$; désignons par $l, k\lambda, k\mu$ une solution de l'équation

$$l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

λ et μ étant premiers entre eux : à cette solution correspond, pour les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient le système S, une transformation singulière du premier degré, dont les indices sont

l, $k\lambda$, $k\mu$; à deux solutions équivalentes répondent deux transformations équivalentes; à deux solutions non équivalentes répondent deux transformations non équivalentes.

Sous une autre forme :

A un point modulaire P_1, donné par des périodes vérifiant le système S, les transformations singulières du premier degré font correspondre autant de points modulaires P_i qu'il y a de solutions, non équivalentes entre elles, de l'équation $z^2 - \varphi(x, y) = 1$.

Parmi les points P_i figure le point modulaire initial P_1 : il correspond à la solution $z = 1$, $x = y = 0$, c'est-à-dire à la transformation unité, que nous comptons ainsi au nombre des transformations singulières.

71. Étudions maintenant les systèmes de deux relations singulières qui dérivent d'un système initial par les transformations singulières de degré 1.

Nous admettrons que le système initial donne naissance à une forme binaire $4\varphi(x, y)$, la forme φ étant primitive (proprement ou improprement), et de discriminant impair [1]; et soit posé, comme d'ordinaire,

$$\varphi(x, y) = Dx^2 + 2q'xy + py^2.$$

Le système considéré peut être réduit, par une transformation ordinaire du premier degré, au type

$$(74) \qquad h^2 - gg' - D = 0, \qquad g - pg' - 2q' = 0,$$

et nous aurons évidemment le droit, si $\varphi(x, y)$ est proprement primitive, de supposer D impair et p pair.

Cela posé, appliquons au système (74) la transformation singulière du premier degré, T, dont les entiers caractéristiques sont définis par les équations (65), et qui suppose, entre les périodes, la relation sin-

---

[1] Ou impairement pair.

gulière

$$(75)\qquad \lambda(h^2 - gg' - D) + \mu(g - pg' - 2q') = 0.$$

Celle-ci ne change pas par T, ou, plus exactement, se change en

$$(76)\qquad \lambda(H^2 - GG' - D) + \mu(G - pG' - 2q') = 0;$$

de même la relation

$$(77)\qquad \mu'(h^2 - gg' - D) - \lambda'(g - pg' - 2q') = 0,$$

où λ' et μ' sont les entiers qui figurent dans les formules (65), se change par T, en vertu de formules connues [1], en

$$(78)\quad \left\{\begin{array}{l} \mu'(H^2 - GG') - 2kq'H - \lambda'G \\ \quad + G'\left\{\begin{array}{l} \lambda' p(\lambda\lambda' l^2 + 2l\mu\mu' - \mu\mu') \\ + D\lambda\mu^2(l-1)^2 - Dp\lambda k^2 - 2q\mu'(l-1)(\mu\mu - l\lambda\lambda') \end{array}\right\} \\ \quad + D[p\mu k^2 - \mu'(\mu\mu' l^2 + 2l\lambda\lambda' - \lambda\lambda')] \\ \quad - p\mu\lambda'^2(l-1)^2 + 2q'\lambda'[l + \mu\mu'(l-1)^2] = 0. \end{array}\right.$$

On n'oubliera pas que λ' et μ' vérifient la relation

$$(64)\qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' = 1.$$

En vertu de cette relation, le système (75), (77) est arithmétiquement équivalent au système (74); il est donc propre, et il en est évidemment de même du système transformé (76), (78), comme on s'en assure d'ailleurs directement.

Pour avoir la forme binaire $\frac{1}{2}\psi(x, y)$, associée à ce dernier système, il faut ajouter membre à membre les relations (76) et (78), multipliées respectivement par x et y, et former l'invariant de la relation singulière ainsi obtenue; on trouve, sans autre difficulté que la longueur des calculs,

$$(79)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi(x, y) = p(-\mu x + l\lambda y)^2 - 2q'(\lambda x + l\mu y)(-\mu x + l\lambda y) \\ \qquad + D(\lambda x + l\mu' y)^2 - k^2(pD - q'^2)y^2. \end{array}\right.$$

---

[1] Ce *Journal*, 5e série, t. VI, p. 284.

On peut écrire aussi, en développant,

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = \quad & x^2(D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2)\\ & + 2xyl[D\lambda\mu' + q'(\mu\mu' - \lambda\lambda') - p\mu\lambda']\\ & + y^2[l^2(D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2) - k^2(pD - q'^2)].\end{aligned}$$

72. Calculons le discriminant de cette forme. A cet effet, observons que la forme $\varphi(x,y)$, c'est-à-dire $Dx^2 + 2q'xy + py^2$, se change, par la substitution de déterminant -1, $x = \lambda X + \mu' Y$, $y = \mu X - \lambda' Y$, en la forme de même discriminant :

$$AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

étant posé

$$\begin{aligned} A &= D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2,\\ B &= D\lambda\mu' + q'(\mu\mu' - \lambda\lambda') - p\mu\lambda',\\ C &= D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2.\end{aligned}$$

Le discriminant de $\psi(x,y)$ s'écrit, avec ces notations,

$$A[l^2C - k^2(pD - q'^2)] - l^2B^2,$$

ou

$$l^2(AC - B^2) - k^2A(pD - q'^2).$$

D'ailleurs $AC - B^2$ est égal au discriminant, $(pD - q'^2)$, de $\varphi(x,y)$, et comme on a, en vertu de (63),

$$l^2 - k^2A = 1,$$

on voit que *le discriminant de $\psi(x,y)$ est égal à celui de $\varphi(x,y)$.*

Je dis maintenant que la forme ψ est primitive (proprement ou improprement). Car, pour qu'elle ne le fût pas, il faudrait que les coefficients de ψ, à savoir A, Bl et $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$ eussent un facteur premier commun, d_i.

Ce facteur diviserait dès lors le discriminant $pD - q'^2$, et, par suite, serait commun à A, Bl, Cl^2 : comme il ne peut diviser l, à cause de la relation $l^2 - k^2A = 1$, il diviserait nécessairement A, B, C, et la forme $\varphi(x,y)$ ne serait pas primitive, contrairement à l'hypothèse initiale.

D'ailleurs, si φ est proprement primitive, ψ peut être improprement primitive, et inversement.

73. *La forme $\psi(x, y)$ est du même genre que la forme $\varphi(x, y)$.* Pour le démontrer, observons d'abord que, si d_i désigne un diviseur premier impair du déterminant $q'^2 - pD$, on a, en vertu de (79), pour le caractère quadratique de ψ par rapport à d_i,

$$\left(\frac{\psi}{d_i}\right) = \left(\frac{DX^2 + 2q'XY + pY^2}{d_i}\right),$$

en posant $X = \lambda x + l\mu' y$, $Y = \mu x - l\lambda' y$; c'est-à-dire

$$\left(\frac{\psi}{d_i}\right) = \left(\frac{\varphi}{d_i}\right). \tag{80}$$

Distinguons maintenant, pour achever la démonstration, plusieurs cas.

1° Si le déterminant $q'^2 - pD$ est de la forme $4N + 1$, les relations (80) suffisent pour que les formes φ et ψ appartiennent au même genre;

2° Si $q'^2 - pD$ est de la forme $4N + 3$, φ et ψ sont proprement primitives; on peut alors, comme on l'a dit au n° **71**, supposer D impair et p pair : q' est alors impair, et p impairement pair.

Or, en faisant $y = 0$, $x = 1$ dans $\psi(x, y)$, on obtient le nombre $D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2$, qui est également représenté par la forme $\varphi(x, y)$, pour $x = \lambda$, $y = \mu$.

Si donc ce nombre est impair, c'est-à-dire si λ est impair, φ et ψ pouvant représenter un même nombre impair appartiennent encore au même genre.

Si λ est pair, faisons, dans ψ, $x = 0$, $y = 1$; nous obtenons, avec les notations du numéro précédent, le nombre $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$. Or, λ étant pair, μ, qui lui est premier, est impair; A, c'est-à-dire $D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2$, est impairement pair, comme p; et l'équation $l^2 - k^2A = 1$ exige que l soit impair et k pair. Dès lors, le nombre $Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$ est congru, suivant le module 4, à C, c'est-à-dire à $D\mu'^2 - 2q'\lambda'\mu' + p\lambda'^2$, nombre impair, puisque μ', en vertu de $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 1$, est impair. Les formes ψ et φ représentent donc respec-

tivement deux nombres impairs, dont la différence est multiple de 4, ce qui établit encore qu'elles appartiennent au même genre (¹).

74. *Réciproquement*, je dis que, si la forme primitive ψ est du même genre que la forme φ, la forme 4ψ est associée à un système de deux relations singulières, déduit du système initial par une transformation singulière du premier degré; ou encore qu'une forme équivalente à ψ peut recevoir l'expression (79).

Nous nous appuierons pour cela sur la belle théorie de la représentation d'un nombre ou d'une forme binaire par une forme quadratique ternaire, exposée aux Articles 280 et suivants des *Disquisitiones* (²). Soit $-l$, $k\lambda$, $k\mu$ une représentation propre du nombre $+1$ par la forme $z^2 - \varphi(x, y)$; on aura

$$l^2 - k^2(D\lambda^2 + 2q'\lambda\mu + p\mu^2) = 1.$$

A cette représentation correspond une représentation d'une forme binaire, de déterminant $q'^2 - pD$, par la réciproque de $z^2 - \varphi$, réciproque qui a pour expression, avec les notations de M. Bachmann,

$$(81) \qquad \mathcal{F}(X, Y, Z) = pX^2 - 2q'XY + DY^2 - (pD - q'^2)Z^2,$$

et qui est égale à l'adjointe de $z^2 - \varphi$, changée de signe.

Pour déterminer la forme binaire en question, on doit trouver six entiers α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, vérifiant les équations

$$(82) \qquad \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = -l, \qquad \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 = k\lambda, \qquad \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 = k\mu,$$

(¹) Si le déterminant $q'^2 - pD$ est impairement pair, on peut supposer D impair, q' pair, p impairement pair. Si λ est impair, φ et ψ représentent un même nombre impair A, et appartiennent au même genre. Si λ est pair, on voit, comme plus haut, que l est impair et k pair : dès lors, le nombre

$$Cl^2 - k^2(pD - q'^2)$$

est congru au nombre impair C suivant le module 8; les formes φ et ψ, qui représentent ainsi deux nombres impairs, dont la différence est multiple de 8, appartiennent encore au même genre.

(²) *Voir* aussi Bachmann, *Zahlentheorie*, 4ᵉ Partie, p. 70-89.

et l'on obtient la forme binaire cherchée, en faisant, dans $\varphi(X, Y, Z)$,

$$(83)\qquad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \alpha_2 y, \\ Y = \beta_1 x + \beta_2 y, \\ Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y. \end{cases}$$

D'ailleurs, à toutes les solutions de (82) correspondent ainsi, par (83) et (81), des formes binaires équivalentes entre elles : il suffit dès lors d'avoir *une solution particulière* des équations (82). Or nous pouvons prendre :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\mu, & \beta_1 &= \lambda, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= l\lambda', & \beta_2 &= l\mu', & \gamma_2 &= k, \end{aligned}$$

ce qui donne, dans (83),

$$\begin{aligned} X &= -\mu x + l\lambda' y, \\ Y &= \lambda x + l\mu' y, \\ Z &= k y, \end{aligned}$$

et, en portant ces valeurs de X, Y, Z dans (81), nous obtenons la forme binaire

$$(84)\quad \begin{cases} p(-\mu x + l\lambda' y)^2 - 2q(\lambda x + l\mu' y)(-\mu x + l\lambda' y) \\ \qquad + D(\lambda x + l\mu' y)^2 - k^2(pD - q^2)y^2, \end{cases}$$

qui est précisément le second membre de (79).

Comme, d'après Gauss, toute forme binaire de déterminant

$$q^2 - pD,$$

représentable proprement par la forme ternaire F, est équivalente à une forme (84), nous avons établi que :

Toute forme binaire de déterminant $q^2 - pD$, représentable proprement par la forme ternaire (81), *est associée à un système de deux relations singulières, déduit du système initial par une transformation singulière de degré* un.

Elle est, par suite, en vertu du n° **73**, du même genre que la forme initiale $\varphi(x, y)$.

Pour établir maintenant la proposition énoncée au commencement du n° **74**, à savoir que toute forme primitive $\psi(x, y)$, du même genre que $\varphi(x, y)$, est équivalente à une forme (84), il suffit d'établir que $\psi(x, y)$ est proprement représentable par la forme ternaire (81).

Or nous avons vu (n° **58**) que, si φ et ψ sont du même genre, les formes $z^2 - \varphi(x, y)$ et $z^2 - \psi(x, y)$ sont équivalentes; leurs adjointes le sont donc également, c'est-à-dire que les deux formes

$$\varphi(Y, -X) - (pD - q'^2)Z^2 \quad \text{et} \quad \psi(Y, -X) - (pD - q'^2)Z^2$$

sont équivalentes, et dès lors, la forme $\psi(x, y)$, représentable proprement par la seconde, l'est également par la première, qui coïncide avec la forme ternaire (81). C. Q. F. D.

75. En résumé :

Si $\varphi(x, y)$ est une forme quadratique binaire positive, primitive, de déterminant impair (¹), *nous savons que tous les systèmes de deux relations singulières qui donnent naissance à des formes de la même classe que 4φ sont réductibles à l'un d'entre eux par des transformations* ordinaires *du premier degré.*

Appliquons maintenant à ce système une transformation singulière *de degré* un; *il se change en un autre système singulier, et si 4ψ est la forme binaire associée à ce nouveau système, les formes (primitives) φ et ψ appartiennent au même genre. Réciproquement, si ψ est une forme primitive (proprement ou non) du même genre que φ, elle est associée à un système singulier, qui dérive du système initial par une transformation* singulière *du premier degré.*

C'est là une nouvelle et rigoureuse démonstration du théorème énoncé au n° **63**.

76. Passons maintenant aux courbes hyperabéliennes, et soit C celle qui est associée à la classe 4φ.

(¹) Ou impairement pair.

A un point P, de C, répondent une infinité de systèmes de périodes g, h, g', qui vérifient les relations singulières initiales $h^2 - gg' = D$, $g - pg' = 2q'$, et qui sont transformés l'un de l'autre par une transformation ordinaire de degré uu, n'altérant pas l'ensemble de ces deux relations.

A tous ces systèmes de périodes, une même transformation singulière du premier degré, d'indices $l, k\lambda, k\mu$, fait correspondre d'autres systèmes de périodes G, H, G', que je dis être équivalents entre eux, c'est-à-dire ne donner qu'un seul et même point modulaire P.

Car soient G, H, G' et G_1, H_1, G'_1 deux de ces nouveaux systèmes, transformés respectivement des systèmes g, h, g' et g_1, h_1, g'_1 par la transformation T, d'indices $l, k\lambda, k\mu$: désignons par S_0 la transformation ordinaire qui fait passer de g_1, h_1, g'_1 à g, h, g' : la transformation TS_0 fera passer de G_1, H_1, G'_1 à g, h, g'; et comme elle a pour indices (n° 65), aux signes près de l et de k, les indices $l, k\lambda, k\mu$ d'une transformation qui fait passer de G, H, G à g, h, g', les systèmes G_1, H_1, G'_1 et G, H, G' sont équivalents (*ibid.*) (¹).

Si donc C' est la courbe hyperabélienne associée au système de deux relations singulières transformé par T du système initial, on voit qu'à un point P de C répond, par T, un point de C', et réciproquement; et l'on retrouve ainsi le théorème du n° 59 :

Considérons les classes de formes quadratiques binaires Σ, Σ', Σ'', ..., *positives, primitives, de même déterminant impair* (²), *qui*

(¹) *Classes ambiguës.* — Ce raisonnement ne s'applique pas si la forme Σ est d'une classe ambiguë. Supposons par exemple que cette forme soit équivalente à la forme $Dx^2 + py^2$, c'est-à-dire qu'on ait $q' = 0$; les relations initiales sont alors réductibles au type $h^2 - gg' = D$, $g = pg'$, et les deux systèmes de périodes (g, h, g'), $(-g, h, -g')$, qui vérifient ces relations, donnent un même point modulaire P (note du n° 51). Or, si S_0 est la transformation ordinaire de degré uu qui fait passer du second système au premier et si T est une transformation singulière d'indices $l, k\lambda, k\mu$, la transformation TS_0 a pour indices $\varepsilon l, \eta k\lambda, -\eta k\lambda$, en désignant ± 1 par ε et η; les deux systèmes G, H, G et G_1, H_1, G_1 que T fait correspondre aux deux systèmes considérés ne sont donc pas nécessairement équivalents; et, par suite, à un point P de la courbe C, la transformation T fait généralement correspondre *deux* points modulaires P.

(²) Ou impairement pair.

appartiennent au même GENRE : *les courbes hyperabéliennes* C, C′, C″, ..., *respectivement associées aux classes* 4Σ, $4\Sigma'$, ..., *sont géométriquement du même* GENRE, *et se correspondent point par point; ces correspondances univoques sont réalisées par des transformations singulières du premier degré* (¹).

77. Reprenons l'ensemble des transformations singulières non équivalentes de degré *un* (n° **70**); leur nombre N est (*ibid.*) celui des solutions non équivalentes de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1.$$

Il résulte de ce qui précède qu'à un point P de la courbe C, associée à la classe 4Σ, ces transformations font correspondre N points modulaires *distincts*, dont l'un coïncide avec P (n° **70**). Parmi ces N points, les uns sont sur la courbe C elle-même, les autres sont sur les courbes C′, C″, ..., associées aux classes $4\Sigma'$, $4\Sigma''$, ... de l'énoncé ci-dessus.

Pour que le point modulaire déduit de P par une transformation T, d'indices l, $k\lambda$, $k\mu$, soit sur C, il faut que T change le système de deux relations singulières dont dérive C en un système donnant une forme équivalente à la forme 4φ, liée à C. La question revient donc à chercher dans quel cas la forme $\psi(x, y)$, définie par (79), à savoir :

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = {} & D(\lambda x + l\mu' y)^2 - 2q'(\lambda x + l\mu' y)(-\mu x + l\lambda' y) \\ & + p(-\mu x + l\lambda' y)^2 - k^2(pD - q'^2)y^2,\end{aligned}$$

sera équivalente à la forme

$$\varphi(x, y) = Dx^2 + 2q'xy + py^2,$$

et, par suite, d'après le n° **74**, à trouver les représentations propres de

---

(¹) *Classes ambiguës.* — Si le genre contient des classes ambiguës, la courbe associée à l'une d'elles correspond *point par couple* à chacune des courbes associées aux classes non ambiguës : cette correspondance (1, 2) est encore réalisée, d'après la note précédente, par une transformation singulière du premier degré. Les courbes associées aux classes non ambiguës ont, entre elles, des correspondances univoques.

la forme $\varphi(x, y)$ par la forme ternaire

$$\mathfrak{F}(X, Y, Z) = DX^2 - 2qXY + pY^2 - (pD - q^2)Z^2.$$

Or, si l'on applique la théorie classique de Gauss, on trouve qu'elles se déduisent toutes de la représentation propre

$$X = x, \qquad Y = -y, \qquad Z = 0,$$

par les transformations en elle-même de la forme $\mathfrak{F}$.

En d'autres termes, en vertu de la réciprocité entre les formes $z^2 - \varphi$ et $\mathfrak{F}$, la forme $\psi(x, y)$ sera équivalente à $\varphi(x, y)$ si l, $k\lambda$, $k\mu$ est une solution de l'équation

$$l^2 - k^2\varphi(\lambda, \mu) = 1,$$

déduite de la solution

$$l = 1, \qquad k\lambda = 0, \qquad k\mu = 0,$$

par une des transformations en elle-même de la forme

$$l^2 - \varphi(k\lambda, k\mu).$$

De même, deux formes ψ et ψ_1, répondant respectivement aux valeurs l, $k\lambda$, $k\mu$ et l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$, seront équivalentes entre elles lorsque la solution l_1, $k_1\lambda_1$, $k_1\mu_1$ de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

se déduira de la solution l, $k\lambda$, $k\mu$ par une des transformations du premier membre en lui-même, et réciproquement.

Si donc on appelle *solutions fondamentales* de l'équation

$$z^2 - \varphi(x, y) = 1$$

des solutions dont on peut déduire toutes les autres par les transformations en elle-même de la forme $z^2 - \varphi(x, y)$, on voit que leur nombre, n, est précisément égal à celui des courbes C, C', C'', ...

c'est-à-dire au nombre des classes de formes de même genre que $\varphi(x, y)$ [1].

Enfin, parmi les N points modulaires que font correspondre à P toutes les transformations singulières de degré *un*, il y en a $\frac{N}{n}$ sur chacune des courbes C, C′, C″, ..., qui admet ainsi $\frac{N}{n}$ transformations univoques [2] en elle-même, y compris la transformation unité.

78. Ces résultats s'étendent sans difficulté aux autres cas, et, en particulier, à celui des formes non primitives.

Par exemple, soit S un système initial de deux relations singulières donnant naissance à une forme 4φ, telle que φ, après division par un nombre impair Ω, soit une forme $\frac{\varphi}{\Omega}$ primitive, de déterminant impair. Une transformation singulière de degré *un* change S en un système analogue, S_1, qui donne naissance à une forme $4\varphi_1$: la forme φ_1 admet le diviseur Ω, et la forme $\frac{\varphi_1}{\Omega}$ est primitive, de même déterminant et de même genre que $\frac{\varphi}{\Omega}$. La réciproque est vraie; on peut donc dire que si ψ, ψ_1, ... sont des formes non équivalentes, primitives, de même déterminant impair et de même genre, les groupes de courbes hyperabéliennes associées respectivement aux formes $4\Omega\psi$, $4\Omega\psi_1$, ..., se transforment les uns dans les autres par des transformations singulières du premier degré.

Représentations d'une forme binaire par la forme $x^2 - 4yz - 4tu$.

79. Nos théories générales se lient étroitement à la représentation d'une forme quadratique binaire positive par la forme à cinq variables $x^2 - 4yz - 4tu$.

---

(1) On suppose que ce genre ne renferme pas de classe ambiguë; s'il en est autrement, il est aisé de modifier les résultats du texte.

(2) Et involutives. Car le carré d'une transformation singulière conduit à des périodes reproduisant le point modulaire initial. (Ce Journal, 5e série, t. VI, p. 324.)

Soit, pour fixer les idées, $\varphi(x, y)$ une forme positive, proprement primitive et de déterminant impair [1]; proposons-nous de représenter proprement 4φ par la forme à cinq variables; il faut pour cela déterminer des entiers A, B, C, D, E; A′, B′, ..., E′, tels qu'en posant

$$\begin{aligned} X &= Bx + B'y, \\ Y &= Ax + A'y, \\ Z &= Cx + C'y, \\ T &= Dx + D'y, \\ U &= Ex + E'y, \end{aligned}$$

on ait identiquement

$$4\varphi(x, y) = X^2 - 4YZ - 4TU,$$

ce qui exige que B et B′ soient pairs. Pour que la représentation soit propre, il faut que les mineurs d'ordre *deux* contenus dans la matrice

$$\begin{matrix} B, & A, & C, & D, & E, \\ B', & A', & C', & D', & E' \end{matrix}$$

n'aient pas de facteur commun.

On peut dire dès lors que 4φ est la forme associée au système *propre* des deux relations singulières

$$(S) \qquad \begin{cases} Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \\ A'g + B'h + C'g' + D'(h^2 - gg') + E' = 0. \end{cases}$$

Cela posé, d'une solution particulière A, A′, ..., E, E′, on en déduit une infinité d'autres en effectuant sur les deux relations précédentes une transformation ordinaire quelconque du premier degré, car cette opération n'altère pas (n° **16**) la forme associée au système. On aura donc une nouvelle solution en remplaçant A, B, C, D, E par les A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 donnés par les formules (3) du n° **1**, et A′, ..., E′ par les expressions homologues.

---

[1] Ou impairement pair.

Je dis qu'on obtient ainsi toutes les représentations propres de 4φ par la forme à cinq variables.

Car si $\beta, \alpha, \gamma, \delta, \varepsilon; \beta', \alpha', \ldots, \varepsilon'$ est une solution du problème, le système propre

$$(S') \qquad \begin{cases} \alpha g + \beta h + \gamma g' + \delta(h^2 - gg') + \varepsilon = 0, \\ \alpha' g + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

est réductible au système (S) par une transformation ordinaire T de degré *un*, puisque ces deux systèmes ont pour forme associée une même forme 4φ, et que φ est proprement primitive et de déterminant impair [1]. Soient alors $F = 0$, $F' = 0$ les deux équations (S); $\Phi = 0$ et $\Phi' = 0$ les deux équations (S'); la transformation T change respectivement $F = 0$ et $F' = 0$ en $\lambda\Phi + \lambda'\Phi' = 0$; $\mu\Phi + \mu'\Phi' = 0$, les entiers $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant tels que $\lambda\mu' - \mu\lambda' = \pm 1$, puisqu'un système propre se transforme en un système propre. Or, par hypothèse, $\varphi(x, y)$ est l'invariant des relations $xF + yF' = 0$ et $x\Phi + y\Phi' = 0$; c'est donc aussi celui de la relation $x(\lambda\Phi + \lambda'\Phi') + y(\mu\Phi + \mu'\Phi') = 0$, transformée par T d'une des précédentes, de sorte qu'on a identiquement

$$\varphi(x, y) = \varphi(\lambda x + \mu y, \lambda' x + \mu' y).$$

On en conclut, en admettant que φ n'appartienne pas à une classe ambiguë, que l'on a

$$\lambda = \mu' = \pm 1, \qquad \mu = \lambda' = 0,$$

c'est-à-dire que les relations $F = 0$, $F' = 0$ sont transformées par T en $\eta\Phi = 0$, $\eta\Phi' = 0$, la quantité η désignant ± 1. En d'autres termes, $\alpha, \ldots, \varepsilon$ sont donnés (au signe près) en fonction de A, B, C, D, E par les relations (3) du n° **1**, et $\alpha', \ldots, \varepsilon'$ le sont, en fonction de $A', \ldots, E'$, par les relations homologues. C. Q. F. D.

Des raisonnements semblables s'appliquent à une forme quelconque de l'un des types $4\varphi(x, y)$ ou $4\varphi(x, y) + y^2$: d'une représentation

---

[1] Ou impairement pair.

propre de cette forme par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$, on en déduit une infinité d'autres par les formules (3) du n° 1, c'est-à-dire, en réalité, par les transformations en elle-même de la forme à cinq variables indiquées au n° 2. Nous dirons que toutes les représentations ainsi obtenues forment un *système* de représentations. Cela posé, on reconnaît immédiatement qu'il y a autant de systèmes de représentations qu'il y a de systèmes de deux relations singulières, irréductibles l'un à l'autre par des transformations ordinaires de degré 1, et donnant naissance à une forme binaire équivalente à la forme considérée.

Ou encore :

Le nombre des courbes hyperabéliennes associées à une classe de formes binaires positives, de l'un des types

$$4\varphi(x, y) \quad \textit{et} \quad 4\varphi(x, y) + y^2,$$

est égal au nombre des systèmes de représentations propres de cette forme par la forme $X^2 - 4YZ - 4TU$.

Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes;

PAR M. H. POINCARÉ.

§ 1. — Introduction.

Le présent Mémoire est le développement d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1883 (*Comptes rendus*, t. XCVII, 1883, 2e semestre, p. 984 et 1189).

Quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de certaines propriétés curieuses et il y a entre leurs périodes quelques relations intéressantes.

On est conduit en passant, à ce résultat, qu'étant donné un groupe fini H quelconque, on peut toujours trouver (sauf un nombre fini d'exceptions) un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à H, et dont les coefficients soient entiers.

M. Frobenius, en 1896 et dans les années suivantes, a publié une série de Mémoires sur les caractères des groupes. Ses résultats peuvent être utilement appliqués à la question qui nous occupe et je crois devoir les rappeler rapidement; je profite d'ailleurs de l'occasion pour les rapprocher d'autres résultats obtenus par M. Cartan et pour faire voir combien les théories de ces deux savants mathématiciens s'éclairent mutuellement.

§ 2. — Intégrabilité algébrique des équations linéaires.

Soit

$$(1) \qquad \sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0$$

une équation linéaire dont les coefficients P_q sont des polynomes entiers. Supposons que l'intégrale générale de cette équation soit algébrique et soit

$$(2) \qquad \theta(x, y) = 0$$

l'équation algébrique qui définit cette intégrale générale. Bien entendu, ce polynome θ, outre les variables x et y, contiendra n constantes arbitraires d'intégration si l'équation (1) est d'ordre n.

L'équation (1) pourrait être intégrée par le procédé général. Posons

$$x = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction fuchsienne correspondant au groupe fuchsien G.

Si cette fonction fuchsienne est convenablement choisie (et cela peut se faire d'une infinité de manières), y sera une fonction zétafuchsienne de z.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales de (1) au nombre de n et linéairement indépendantes. On aura

$$y_1 = \zeta_1(z), \qquad y_2 = \zeta_2(z), \qquad \ldots, \qquad y_n = \zeta_n(z),$$

les ζ étant des fonctions zétafuchsiennes. Quand z subira une substitution du groupe G, les ζ_i subiront une substitution linéaire appartenant au groupe H de l'équation linéaire (1). Le groupe H sera donc isomorphe à G.

Mais ici l'intégrale générale étant supposée algébrique, le groupe H sera d'*ordre fini*, de sorte que l'isomorphisme sera *mériédrique*.

Parmi toutes les substitutions de G, il y en aura donc qui correspondront dans H à la substitution identique. L'ensemble de ces substitutions formera un groupe G′ qui sera un groupe fuchsien et qui sera un sous-groupe invariant du groupe G. Le groupe G′ n'est donc pas simple.

Ce groupe fuchsien G′ engendrera un système S′ de fonctions fuchsiennes; il est aisé de voir que le système S′ contiendra le système S des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G; que x et y ou toute fonction rationnelle de x et de y est une fonction fuchsienne du système S. Il en est de même de toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

J'ai dit que le polynome θ contenait, outre les variables x et y, des constantes arbitraires d'intégration. Selon les valeurs que l'on attribuera à ces n constantes, trois cas pourront se présenter :

1° Ou bien les diverses déterminations de la fonction algébrique y pourront s'exprimer linéairement à l'aide de m d'entre elles, le nombre m étant $< n$; par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) n'est pas une combinaison linéaire des diverses déterminations de la fonction algébrique y;

2° Ou bien l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y; mais le groupe de l'équation algébrique $\theta(x, y) = 0$ est plusieurs fois transitif;

3° Ou bien enfin l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y et le groupe de l'équation algébrique $\theta = 0$ est simplement transitif.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de n intégrales de (1) linéairement indépendantes.

Posons

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n.$$

Faisons décrire à x un contour fermé quelconque; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiront une transformation linéaire T, à savoir celle des transformations du groupe H qui correspond à ce contour; les y se changeront donc en $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et u se changera en

$$u' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \ldots + \alpha_n y'_n.$$

Peut-il arriver que u' soit identique à u? Les y' sont des fonctions linéaires des y; on aura donc

$$u' = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$

les β étant des fonctions linéaires des α. Pour que $u = u'$, il faudrait que

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \beta_n.$$

Cela peut arriver pour certaines valeurs des α, mais ces relations ne peuvent être satisfaites identiquement, quels que soient les α, à moins que l'on n'ait

$$y'_1 = y_1, \qquad y'_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad y'_n = y_n,$$

c'est-à-dire que la transformation linéaire T ne se réduise à la substitution identique.

Ainsi u' sera différent de u, à moins que les u ne satisfassent à un système X de relations algébriques.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_p$ les transformations non identiques du groupe H; elles sont en nombre fini; à chacune d'elles correspond un système de relations algébriques entre les α. Si les α ne satisfont à aucun de ces systèmes, la fonction u n'est transformée en elle-même par aucune des transformations T, c'est-à-dire que si x décrit un contour fermé et que u revienne à sa valeur initiale, la transformation T sera identique et toutes les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviendront à leurs valeurs initiales.

Or u est une fonction algébrique de x, susceptible de plusieurs déterminations.

Si, x décrivant un contour fermé, l'une de ces déterminations revient à sa valeur initiale, il en sera de même de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et, par conséquent, de toutes les autres déterminations de u. Donc le groupe de la fonction algébrique u est simplement transitif.

Nous pouvons donc supposer que les constantes d'intégration aient été choisies de telle sorte que le groupe de l'équation algébrique

$$\theta(x, y) = 0$$

soit simplement transitif.

Mais pouvons-nous toujours choisir les α de telle façon que l'intégrale générale de (1) soit une combinaison linéaire des diverses déterminations de u?

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, le nombre des déterminations linéairement indépendantes de $u = \Sigma \alpha_i y_i$ sera $m < n$.

Donc u satisfera à une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels. D'ailleurs, comme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviennent à leur valeur initiale quand u revient à sa valeur initiale (pourvu que les α aient été choisis comme je viens de le dire), les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront des fonctions rationnelles de x et de u. Donc l'intégrale générale de (1) sera une fonction rationnelle de x et de l'intégrale générale d'une équation d'ordre moindre.

Je dirai alors que l'équation (1) est *imprimitive*.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'équation (1) est *primitive* et que les constantes aient été choisies de telle sorte que la fonction algébrique y admette n déterminations linéairement indépendantes et que son groupe soit simplement transitif.

La question de l'intégrabilité algébrique des équations linéaires est liée à celle des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein a résolu complètement la question en ce qui concerne le deuxième ordre. M. Jordan, dans le Tome 84 du *Journal de Crelle*, puis dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a donné une méthode générale pour la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire et a appliqué sa méthode au troisième ordre.

Une question se pose toutefois. Étant donné un groupe fini contenu dans le groupe linéaire à n variables, existe-t-il toujours une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre intégrable algébriquement et correspondant à ce groupe? Cette question, comme on devait s'y attendre, doit être résolue affirmativement.

Disons quelques mots d'abord de la constitution des groupes discontinus. Je suppose un groupe discontinu dérivé d'un nombre fini p de substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

On obtiendra toutes les substitutions de ce groupe en combinant ces p substitutions.

A chacune de ces combinaisons

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots,$$

où α_i, α_k, α_h sont des entiers positifs ou négatifs, correspondra une substitution du groupe, mais toutes ces combinaisons ne sont pas toujours distinctes. Il peut y avoir deux de ces combinaisons qui seront identiques, auquel cas il y aura une de ces combinaisons qui se réduira à la substitution identique.

1. On aura donc un certain nombre de relations de la forme

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots = 1. \tag{3}$$

Ce sont *les relations de structure* du groupe.

Toutes ces relations ne sont pas distinctes; elles peuvent toutes se déduire d'un certain nombre d'entre elles que l'on appelle *relations fondamentales*. Je renverrai pour plus de détails au § **5** de mon Mémoire *Sur les groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. 1).

Quelles sont pour un groupe fuchsien les relations de structure et en particulier les relations fondamentales? Je me bornerai à rappeler le résultat que j'ai obtenu à la page 16 du Mémoire cité. Décomposons le demi-plan en polygones générateurs R_0, R_1, ..., R_q, ...; à chacun des côtés de R_0 correspondra une substitution du groupe fuchsien, de telle sorte que les substitutions qui correspondent à deux côtés conjugués soient inverses l'une de l'autre. A chaque côté de R_q nous ferons correspondre la même substitution qu'au côté correspondant de R_0.

Décrivons un contour fermé qui traverse nécessairement les régions R_1, R_2, ..., R_h et en sort par les côtés C_1, C_2, ..., C_h auxquels correspondent les substitutions S_1, S_2, ..., S_h; nous aurons alors

$$S_1 S_2 \ldots S_h = 1,$$

et nous obtiendrons ainsi toutes les relations de structure du groupe.

Pour obtenir toutes les relations fondamentales, il suffira de décrire des contours fermés infinitésimaux autour des divers sommets de R_0.

Les divers sommets d'un même cycle donneront d'ailleurs la même

relation, de sorte qu'il y aura autant de relations fondamentales que de cycles.

Appliquons cette règle à un groupe fuchsien du genre 0. Soient

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}\beta_p\beta_{p-1}\ldots\beta_2\beta_1\alpha_0$$

les $2p+2$ sommets du polygone R_0. Le côté $\alpha_i\alpha_{i+1}=C_i$ sera conjugué du côté $\beta_i\beta_{i+1}=C'_i$ et la substitution S_i transformera C_i en C'_i. Les sommets formeront $p+2$ cycles, à savoir

$$\alpha_0,\quad \alpha_1\beta_1,\quad \alpha_2\beta_2,\quad \ldots,\quad \alpha_p\beta_p,\quad \alpha_{p+1},$$

et je supposerai que la somme des angles des sommets de ces cycles soit respectivement

$$\frac{2\pi}{n_0},\quad \frac{2\pi}{n_1},\quad \frac{2\pi}{n_2},\quad \ldots,\quad \frac{2\pi}{n_p},\quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Alors les relations fondamentales correspondant à ces différents cycles seront

$$(4)\qquad S_0^{n_0}=(S_1S_0^{-1})^{n_1}=(S_2S_1^{-1})^{n_2}=\ldots=(S_pS_{p-1}^{-1})^{n_p}=S_p^{n_{p+1}}=1.$$

Cela posé, quel rapport y a-t-il entre les relations de structure de deux groupes isomorphes? Il est clair que si l'isomorphisme est holoédrique les relations seront les mêmes; mais si l'isomorphisme est mériédrique l'un des deux groupes aura toutes les relations de structure de l'autre et en admettra, en outre, encore d'autres. Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les deux groupes soient mériédriquement isomorphes.

Cela posé, soit H un groupe d'ordre fini contenu dans le groupe linéaire; supposons que ce groupe soit dérivé de $p+1$ substitutions

$$S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad \ldots,\quad S_p.$$

Ce groupe étant d'ordre fini, une quelconque de ses substitutions sera d'ordre fini.

Ce sera le cas, en particulier, pour les substitutions

$$S_0,\quad S_1S_0^{-1},\quad S_2S_1^{-1},\quad \ldots,\quad S_pS_{p-1}^{-1},\quad S_p^{-1}.$$

Il existera donc des entiers $n_0, n_1, \ldots, n_{p+1}$, tels que

$$(4\,bis)\qquad S_0^{n_0}=(S_1S_0^{-1})^{n_1}=(S_2S_1^{-1})^{n_2}=\ldots=(S_pS_{p-1}^{-1})^{n_p}=(S_p^{-1})^{n_{p+1}}=1.$$

Ces relations ne seront d'ailleurs pas les seules relations de structure du groupe H.

Cela posé, nous pouvons construire un polygone fuchsien R_0 de genre o, de telle façon que les sommes des angles des sommets des différents cycles soient respectivement

$$(5)\qquad \frac{2\pi}{n_0},\quad \frac{2\pi}{n_1},\quad \ldots,\quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Soit G le groupe fuchsien correspondant. Ses substitutions fondamentales $S_0, S_1, \ldots, S_p$ satisferont aux relations (4) qui seront ses seules relations fondamentales.

Donc le groupe H admettra les mêmes relations de structure que G et encore d'autres; donc H est mériédriquement isomorphe à G. Il existera donc dans G un sous-groupe fuchsien G′ formé des substitutions de G auxquelles correspond dans H la substitution identique.

D'un autre côté, reportons-nous au paragraphe 5 du Mémoire : *Sur les fonctions zétafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V), nous verrons que, le groupe G étant de la première famille et le groupe H contenu dans le groupe linéaire à n variables étant isomorphe à G, nous pouvons construire n fonctions zétafuchsiennes

$$\zeta_1(z),\quad \zeta_2(z),\quad \ldots,\quad \zeta_n(z)$$

qui subissent une substitution linéaire du groupe H quand la variable z subit la substitution correspondante du groupe fuchsien G. Ces fonctions ζ sont en même temps des fonctions fuchsiennes admettant le groupe fuchsien G′. Si donc on pose

$$y=\zeta(z),$$

y va satisfaire à une relation algébrique

$$(2)\qquad \theta(x,y)=0$$

et à une équation différentielle d'ordre n à coefficients rationnels.

Ainsi, à la question posée plus haut, on doit faire une réponse affirmative; on peut même remarquer qu'elle comporte une infinité de solutions dépendant d'un grand nombre d'arbitraires :

1° On peut choisir de plusieurs manières dans le groupe H les substitutions auxquelles on fera jouer le rôle de

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p;$$

2° Il y a une infinité de polygones R_0 de genre 0 et de $2p+2$ sommets tels que la somme des angles des différents cycles admettent les valeurs (5). Il reste encore $p-1$ arbitraires, et c'est ce que je puis traduire en disant que je peux choisir arbitrairement les $p+2$ points singuliers de la fonction algébrique définie par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, ceux de l'équation linéaire (1).

Soit m le nombre des déterminations de y, ce sera en même temps le degré en y de l'équation $\theta = 0$ et l'ordre du groupe H. Je désigne par q le genre de la relation (2).

Proposons-nous de calculer q. La surface du polygone R_0 sera

$$2\pi\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \ldots - \frac{1}{n_{p+1}}\right).$$

Soit R'_0 le polygone générateur du groupe G'; sa surface sera évidemment

$$2\pi m\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \ldots - \frac{1}{n_{p+1}}\right) = 2\pi m\left(p - \sum \frac{1}{n_i}\right).$$

On aura, d'autre part,

$$q = \frac{\nu + 1 - \mu}{2},$$

2ν étant le nombre des côtés de R'_0 et μ le nombre de ses cycles.

D'un autre côté, la surface de R'_0 sera

$$2\pi\left(\nu - 1 - \sum \frac{1}{\alpha_i}\right),$$

en supposant que la somme des angles des μ cycles soit

$$\frac{2\pi}{\alpha_1}, \quad \frac{2\pi}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{\alpha_\mu}.$$

Or $\nu = \mu - 1 + 2q$, nous pouvons donc écrire pour cette surface

$$2\pi\left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

L'autre expression peut de même s'écrire

$$2\pi m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right].$$

Donc

$$(6) \qquad m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = \left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

Considérons un des cycles de R_0 dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{n_i}$. Soit A l'un de ses sommets; envisageons les différents transformés de A par les substitutions de G.

Considérons ceux de ces transformés qui sont intérieurs à R'_0 ou qui sont des sommets de R'_0; ces derniers se répartissent en cycles. Soit B un de ceux qui sont intérieurs à R'_0. Observons que R'_0 peut être décomposé en m polygones congruents à R_0 et que j'appellerai

$$(7) \qquad R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{m-1},$$

chacun d'eux étant transformé de R_0 par une des substitutions de G.

Si nous envisageons ceux de ces polygones qui ont un sommet en B, nous voyons que ce sommet est homologue à A ou à un des sommets du cycle auquel appartient A et que, parmi ces polygones, il y en aura n_i pour lesquels ce sommet sera homologue à A. Il y aura donc n_i substitutions de G qui changeront A en B.

Soit maintenant C un transformé de A qui soit un sommet de R'_0 et soit $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ la somme des angles du cycle auquel appartient C. Parmi les m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7), il y en aura alors $\frac{n_i}{\alpha_k} = \beta_k$ qui changent A en C, ou un des sommets du même cycle.

D'où il suit d'abord que n_i est divisible par α_k.

Convenons alors de prendre pour le point B

$$\alpha_k = 1, \qquad \beta_k = n_i;$$

nous aurons

$$\sum \beta_k = m, \tag{8}$$

la sommation étant étendue à tous les points tels que B et C. Et, en effet, chacune des m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7) change A en l'un des points B ou C.

Remarquons que chaque cycle de R'_0 ne devra être représenté qu'une fois dans la somme $\sum \beta_k$, même si plusieurs points C appartiennent à ce cycle.

Toutes les considérations qui précèdent et, en particulier, les relations (6) et (8) s'appliqueraient à un sous-groupe *quelconque* de G. Mais il y a ici quelque chose de plus, car G′ est un sous-groupe *invariant*.

Il en résulte qu'une substitution quelconque de G change R'_0 en un polygone équivalent. Reprenons alors notre point A et ses transformés B et C. Soient C et C′ deux de ces transformés appartenant à deux cycles différents de R'_0.

Il y aura une substitution de G qui changera C en C′. Soit $\frac{2\pi}{\alpha}$ et $\frac{2\pi}{\alpha'}$ la somme des angles des deux cycles correspondants. Qu'est-ce que cela veut dire? Cela veut dire que, parmi les substitutions de G′, il y en aura une qui, *au point de vue non euclidien*, pourra être regardée comme une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C; donc, le sous-groupe étant invariant, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C′ devra appartenir à G′; de même, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha'}$ autour de C devra appartenir à G′. Cela n'est possible que si $\alpha = \alpha'$.

Supposons maintenant que l'un des transformés de A soit un point B. Alors, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de B appartiendra à G; mais comme B est intérieur au polygone générateur de G′, cela n'est

possible que si cette rotation se réduit à la substitution identique, c'est-à-dire si $\alpha = 1$.

Deux cas seulement sont donc possibles :

1° Ou bien aucun des transformés de A n'est intérieur à R'_0; dans ce cas, tous les α_k sont égaux entre eux, de même que tous les β_k; si k_i est le nombre des cycles correspondants, on aura

$$\beta_k = \frac{m}{k_i}, \qquad \alpha_k = \frac{n_i k_i}{m},$$

et, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = k_i\left(1 - \frac{m}{n_i k_i}\right) = \frac{m}{\beta_k} - \frac{m}{n_i}.$$

2° Ou bien quelques-uns des transformés de A sont intérieurs à R_0, tous les α sont égaux à 1, de sorte qu'on a, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = 0.$$

Nous distinguerons donc parmi les cycles de R_0, c'est-à-dire parmi les termes du premier membre de (6), deux cas :

1° Dans le premier cas, où $\beta_k = \frac{m}{k_i}$, $\alpha_k = \frac{n_i k_i}{m}$, on aura, en étendant la sommation aux cycles correspondants de R'_0,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{m}{\beta_k} - m;$$

2° Dans le second cas, où $\alpha_k = 1$, $\beta_k = n_i$, on aura

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{m}{n_i} - m = \frac{m}{\beta_k} - m.$$

Or la relation (6) peut s'écrire

$$-2m - \sum\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = 2q - 2;$$

nous aurons donc

$$(9) \qquad m\left[-2+\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]=2q-2,$$

les β étant des entiers.

Discutons cette relation à laquelle nous aurions peut-être pu parvenir plus rapidement par des considérations sur la division régulière des surfaces de Riemann.

Dans le cas de $q=0$, le second membre sera négatif et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)<2.$$

Dans le cas de $q=1$, le second membre sera nul et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)=2.$$

Dans le cas de $q>1$, le second membre sera positif, mais comme m est un entier plus grand que 1, nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\leqq 2+\frac{2q-2}{m}<q+1.$$

En tout cas $\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$ est limité; les β sont des entiers; nous pouvons laisser de côté les termes pour lesquels $\beta=1$ et qui sont nuls. Donc β est au moins égal à 1, de sorte que $1-\frac{1}{\beta}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Soit ρ le nombre des termes de la somme $\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$, on aura

$$\rho>\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\geqq\frac{\rho}{2}.$$

Dans le cas de $q=0$, on aura donc

$$\rho<4,$$

c'est-à-dire $\rho=1$, 2 ou 3.

D'autre part,

$$\rho > \sum\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = 2 - \frac{2}{m} > 1.$$

Donc $\rho = 2$ ou 3. Si $\rho = 2$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{2}{m},$$

équation qui n'admet d'autre solution que

$$\beta_1 = \beta_2 = m,$$

si l'on observe que l'équation (8) exige

$$\beta_1 \leqq m.$$

Si $\rho = 3$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} > 1,$$

qui admettent comme solutions

$$\beta_1 = \beta_2 = 2, \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 3,\ 4 \text{ ou } 5.$$

On retrouve ainsi les groupes connus de Klein et on n'en trouve pas d'autres.

Dans le cas de $q = 1$, on a

$$\rho > \sum\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) > 2 \geqq \frac{\rho}{2},$$

d'où $\rho = 3$ ou 4, ce qui donne les solutions connues

$$\beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 6, \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = \beta_3 = 4,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 4.$$

Dans le cas de $q > 1$, on aura

$$q + 1 > \frac{\rho}{2}$$

et $\rho > 2$; avec

$$\sum \frac{1}{\beta} = \rho - 2 - \frac{2q-2}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2}{m} + \sum \frac{1}{\beta} = \rho - 2$$

(d'où d'abord $\rho > 2$).

Or

$$\beta < m, \qquad \text{d'où} \qquad \sum \frac{1}{\beta} > \frac{\rho}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2+\rho}{m} < \rho - 2,$$

ce qui donne une limite inférieure de m.

Or nous avons vu plus haut que β est un diviseur de m et égal à $\frac{m}{k_i}$, notre équation peut alors s'écrire

$$\sum k_i + 2q - 2 = m(\rho - 2).$$

Soient β_1 le plus grand des β et S la somme de tous les autres $\frac{1}{\beta}$, on pourra écrire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = \rho - 2 - S,$$

et, comme S est au plus égal à $\frac{\rho-1}{2}$,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{\rho-3}{2},$$

et, *a fortiori*, puisque $\beta_1 < m$,

$$\frac{2q-1}{\beta_1} > \frac{\rho-3}{2}.$$

Si $\rho > 3$, cette relation limitera β_1 et, par conséquent, tous les

autres β; j'ajoute qu'elle limite ρ, car elle donne

$$\rho - 3 < 2q - 1,$$

puisque $\beta_1 \geqq 2$.

Si $\rho = 3$, on ne pourra avoir $\beta_2 = \beta_3 = 2$, auquel cas on aurait $S = 1$ et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = 0.$$

Le cas le plus défavorable est donc

$$\beta_2 = 2, \qquad \beta_3 = 3,$$

d'où

$$S = \frac{5}{6}.$$

On a donc

$$S < \frac{5}{6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{1}{6},$$

ce qui limite encore β_1 et, par conséquent, tous les autres β.

En résumé, *pour un genre q déterminé*, nos groupes H se ramèneront à un nombre fini de types.

§ 3. — Propriétés des intégrales abéliennes.

Reprenons la relation algébrique

$$\theta(x, y) = 0, \tag{2}$$

dont le degré est m et le genre q.

Toute fonction rationnelle de x et de y sera une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G'; soit maintenant

$$\int R(x, y)\, dx \tag{3}$$

une des q intégrales abéliennes de première espèce de la courbe algébrique (2); ce sera une fonction uniforme de z: cette fonction sera toujours finie et elle se reproduira à une constante près quand z subira une des substitutions du groupe G.

Si donc nous appelons cette fonction $K(z)$, nous aurons

$$K(zS) = K(z) + \omega,$$

où j'écris, pour abréger, zS au lieu de $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, la substitution

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

étant une des substitutions du groupe fuchsien G. Quant à ω, c'est une constante qui n'est autre chose qu'une période de l'intégrale abélienne (3).

A chaque substitution de G correspondra ainsi une période de (3); mais, bien entendu, pour certaines de ces substitutions, cette période sera nulle. Si ω correspond à S et ω' à S', on voit que $\omega + \omega'$ correspondra à SS', de même qu'à S^2, et $m\omega + n\omega'$ à $S^m S'^n$ $S^2 S'^2 \ldots$ pourvu que $\sum m_i = m$, $\sum n_i = n$.

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G. Que sera-ce que $K(z\sigma)$? Ce sera évidemment encore une intégrale abélienne de première espèce.

Si nous changeons z en zS, $z\sigma$ se changera en $zS\sigma$, et il viendra

$$K(zS\sigma) = K(z\sigma) + \omega,$$

ω étant la période de $K(z\sigma)$ correspondant à S.

Soient alors $S_1, S_2, \ldots, S_h$ les substitutions fondamentales de G; soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ les périodes correspondantes de $K(z)$, $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_h$ celles de $K(z\sigma)$; nous aurons

$$K(zS_i) = K(z) + \omega_i,$$

$$K(zS_i\sigma) = K(z\sigma) + \omega'_i.$$

Si, dans cette dernière équation, je change z en $z\sigma^{-1}$, il vient

$$K(z\sigma^{-1}S_i\sigma) = K(z) + \omega'_i.$$

Or G' étant un sous-groupe invariant de G, la substitution $\sigma^{-1}S_i\sigma$ appartiendra aussi à G'; d'où il suit que ω'_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers des ω_i.

Ainsi les périodes de l'intégrale abélienne de première espèce $K(z\sigma)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de l'intégrale abélienne de première espèce $K(z)$ et réciproquement.

Introduisons maintenant les intégrales abéliennes de seconde espèce; ces intégrales seront encore des fonctions uniformes de z, mais elles admettront des pôles. Soit $P(z, a)$ une de ces intégrales, exprimée en fonction de z; elle sera définie par les conditions suivantes :

1° Elle sera fonction méromorphe de z dans tout le cercle fondamental;

2° Elle admettra comme pôles simples les points

$$z = a \quad \text{et} \quad z = aS \quad (S \text{ étant une des substitutions de } G'),$$

et elle n'en admettra pas d'autres;

3° Le résidu de la fonction

$$P(z, a)$$

sera égal à 1 pour le pôle $z = a$;

4° On aura pour une substitution S quelconque de G :

$$P(zS, a) = P(z, a) + \varphi(a), \tag{3}$$

$\varphi(a)$ étant une constante ne dépendant que de a; de telle sorte qu'à chaque substitution de G' corresponde une période de l'intégrale P.

Ces conditions ne suffiraient pas pour déterminer P, puisque, si si elles sont remplies par P, elles le seront par $P + K$, K étant une intégrale de première espèce.

On peut achever de définir P (à une constante près) en s'imposant encore une condition :

5° p des périodes de P choisies une fois pour toutes, et que j'appellerai les *périodes de première sorte*, devront être nulles.

Étudions les propriétés de ces fonctions P.

Quels sont les résidus de P pour ses différents pôles? Soit

$$\frac{dx}{dz} = \psi(z),$$

et soit A le résidu de P pour le pôle $z = aS$. Nous aurons

$$P(zS^{-1}, a) = P(z, a) + \varsigma_1(a),$$

$\varsigma_1(a)$ étant la période qui correspond à la substitution S^{-1}; et pour z très voisin de aS, le premier membre sera très voisin de $\frac{1}{zS^{-1} - a}$ et le second de $\frac{A}{z - aS}$, on aura donc sensiblement

$$\frac{1}{zS^{-1} - a} = \frac{A}{z - aS},$$

d'où

$$A = \frac{\psi(a)}{\psi(aS)}.$$

Les conditions énoncées plus haut suffisent pour déterminer P à une constante près, car, si deux fonctions y satisfaisaient, elles auraient mêmes pôles et mêmes résidus; leur différence $D(z)$ serait partout finie. On aurait d'ailleurs

$$D(zS) - D(z) = \text{const.}$$

Donc $D(z)$ serait une intégrale de première espèce et comme p des périodes devraient être nulles, cette intégrale se réduirait à une constante.

Cela posé, j'observe que, dans la relation (3), $\varsigma(a)$ doit être une fonction uniforme de a, puisque, quand on se donne a, la fonction $P(z, a)$ est entièrement déterminée à une constante près, et, par conséquent, la différence $P(zS, a) - P(z, a)$ entièrement déterminée. De plus, cette fonction est toujours finie, puisque, quel que soit a, il

suffit de donner à z une valeur différente des divers points aS pour que $P(zS, a)$ et $P(z, a)$ soient finis.

Soit maintenant T une substitution quelconque de G et considérons

$$P(z, aT).$$

Cette fonction admet comme pôle le point aS avec le résidu :

$$\frac{\psi(aT)}{\psi(aS)}.$$

On aura donc

$$P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} P(z, a) + \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$P(zS, aT) - P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} [P(zS, a) - P(z, a)]$$

ou

$$\varphi(aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} \varphi(a).$$

Considérons maintenant la fonction $\int \varphi(z)\, dz = G(z)$.

Remarquons que x prend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = aT$, de sorte que

$$dx = \psi(aT)\, d(aT) = \psi(a)\, da,$$

d'où

$$\varphi(aT)\, d(aT) = \varphi(a)\, da$$

ou, en intégrant,

$$G(aT) = G(a) + \text{const.}$$

Donc $G(z)$ est une intégrale abélienne de première espèce.

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G, et changeons σ en $z\sigma$ dans la relation (3), il viendra :

$$(3\,a) \qquad P(z\sigma S, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a).$$

Or, le sous-groupe G étant invariant, on aura

$$\sigma S = S'\sigma,$$

S' appartenant aussi à G', d'où

$$(3\,bis) \qquad P(zS'\sigma, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a),$$

ce qui veut dire d'abord que la période de l'intégrale $P(z\sigma, a)$ qui correspond à S' est égale à $\varphi(a)$; c'est-à-dire que les périodes de $P(z\sigma, a)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $P(z, a)$.

Nous aurons d'autre part

$$(3\,ter) \qquad P(zS', a) = P(z, a) + \varphi'(a).$$

$\varphi'(a)$ étant la période correspondant à S', étant par conséquent une combinaison linéaire des périodes fondamentales de P.

Comparons maintenant les résidus des deux fonctions

$$P(z, a\sigma^{-1}), \quad P(z\sigma, a)$$

pour le pôle $z = a\sigma^{-1}$; pour z voisin de $a\sigma^{-1}$, ces deux fonctions se réduiront sensiblement à

$$\frac{1}{z - a\sigma^{-1}}, \qquad \frac{1}{z\sigma - a}.$$

Or on a sensiblement :

$$\frac{1}{z\sigma - a} = \frac{1}{z - a\sigma^{-1}} + \frac{\varphi(a)}{\varphi(a\sigma^{-1})}.$$

On aura donc sensiblement :

$$(4) \qquad P(z\sigma, a) = \frac{\varphi(a)}{\varphi(a\sigma^{-1})} P(z\sigma, a\sigma^{-1}).$$

Je veux dire que la différence des deux membres reste finie; comme chacun des membres est une intégrale de seconde espèce, la différence devra donc être une intégrale de première espèce. Devons-nous

dire que cette intégrale se réduit à une constante? Il faudrait pour cela que toutes les périodes que nous avons appelées de première sorte fussent nulles. Supposons donc que S soit une substitution qui corresponde à une période de la première sorte; la fonction $\varphi(a)$ qui figure dans $(3a)$ et $(3\,bis)$ sera nulle. Les périodes de la première sorte du second membre de (4) seront donc nulles. En sera-t-il de même pour le premier membre et, par conséquent, pour la différence des deux membres? Aura-t-on, en d'autres termes,

$$P(z S\sigma, a) = P(z\sigma, a)?$$

Le premier membre peut s'écrire $P(z\sigma S'', a)$, où S'' appartient à G; la période $\varphi''(a)$ correspondant à S'' devrait être nulle; elle devrait être de la première sorte.

La condition pour que nous ayons le droit de dire que la différence des deux membres de (4) est une constante serait donc que σ transformât toutes les périodes de la première sorte en périodes de la première sorte. Comme il n'en sera pas ainsi en général, tout ce que nous avons le droit de dire, c'est que cette différence est une intégrale de première espèce que j'appellerai $K(z, a, \sigma)$.

L'équation $(3\,bis)$ devient alors :

$$\begin{aligned} &P(zS', a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(zS', a, \sigma) \\ &\quad = P(z, a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(z, a, \sigma) + \varphi(a) \end{aligned}$$

ou

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S)\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + \theta(S', a, \sigma) = \varphi(a, S),$$

en désignant par $\varphi(a, S)$ et $G(a, S)$ les fonctions $\varphi(a)$ et $G(a)$ qui correspondent à la substitution S et par $\theta(S, a, \sigma)$ la période de $K(z, a, \sigma)$ qui correspond à S.

Comme x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, elle reprend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = a\sigma^{-1}$; on peut donc écrire :

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\,da\sigma^{-1} + \theta(S', a, \sigma)\,da = \varphi(a, S)\,da,$$

d'où

$$(5)\qquad \int \theta(S, a, \sigma)\, da = G(a, S) - G(a\sigma^{-1}, S) + \text{const.}$$

Le résultat s'énonce donc sous une forme plus simple quand on compare les intégrales de seconde espèce

$$P(z, a), \quad P(z\sigma, a).$$

Alors la période de la première de ces intégrales qui correspond à S serait égale à $\varphi(a)$, de même que la période de la seconde intégrale qui correspond à S'.

Donc les périodes fondamentales de $P(z\sigma, a)$ seraient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes fondamentales de $P(z, a)$. Seulement, $P(z\sigma, a)$ ne rentrerait pas dans le type des intégrales $P(z, a)$, parce que ses périodes de première espèce ne seraient pas nulles en général.

Pour aller plus loin, cherchons la condition pour qu'il existe une fonction rationnelle $F(x, y)$ de x et de y qui satisfasse à une équation linéaire

$$(1)\qquad \sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0$$

d'ordre n. Cette fonction rationnelle sera évidemment égale à une fonction fuchsienne $\Phi(z)$ admettant le groupe G. Si alors σ est une substitution quelconque de G n'appartenant pas à G, $\Phi(z\sigma)$ satisfera à la même équation, de sorte que les m fonctions fuchsiennes $\Phi(z\sigma)$ ne seront pas linéairement indépendantes et s'exprimeront linéairement à l'aide de n d'entre elles. Il y aura donc entre ces m fonctions $m - n$ relations linéaires. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Soit alors β un des pôles de $\varphi(z)$; soient

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2, \quad \sigma_3, \quad \ldots, \quad \sigma_m$$

m substitutions de G, distinctes par rapport à G, c'est-à-dire telles qu'aucune des combinaisons $\sigma_i \sigma_k^{-1}$ n'appartienne à G. Considérons les pôles

$$\beta\sigma_1, \quad \beta\sigma_2, \quad \ldots, \quad \beta\sigma_m.$$

et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

les résidus correspondants de $\Phi(z)$. Si l'un de ces points n'était pas un pôle de $\Phi(z)$, le résidu correspondant serait regardé comme nul.

Posons

$$b_i = a_i \psi(\beta\sigma_i),$$

de façon que

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m$$

soient les résidus correspondants de la fonction rationnelle $F(x, y)$. Alors ces mêmes points seront encore des pôles pour $\Phi(z\sigma)$ avec les résidus

$$\frac{b_1(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_1)}, \quad \frac{b_2(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{b_m(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_m)},$$

les lettres $b_1(\sigma), b_2(\sigma), \ldots, b_m(\sigma)$ n'étant autre chose que les lettres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ placées dans un autre ordre. Il est aisé de voir ce que c'est que cet ordre. On aura

$$b_k(\sigma) = b_i$$

si l'on a

$$\sigma_i \sigma^{-1} = \sigma_k S,$$

S appartenant à G.

En d'autres termes, les lettres $b_i(\sigma)$ ne sont autre chose que ce que deviennent les lettres b_i quand on les permute en leur faisant subir une des substitutions du groupe simplement transitif H de la relation algébrique (2).

Nous avons dit qu'il y a $m - n$ relations linéaires entre les fonctions $\Phi(z\sigma)$; il y aura les mêmes relations linéaires entre les résidus d'un même pôle, par exemple entre les $b_1(\sigma)$, les mêmes encore entre les $b_2(\sigma)$, les mêmes enfin entre les $b_m(\sigma)$.

Formons alors un déterminant à m lignes et m colonnes, où la $k^{\text{ième}}$ ligne sera formée par les $b_k(\sigma)$, de telle sorte que dans chaque ligne nous retrouvions les mêmes lettres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dans un ordre différent. C'est ce que M. Frobenius appelle un *déterminant de groupe* (gruppendeterminant).

Il y aura les mêmes $m-n$ relations linéaires entre les éléments des diverses lignes de ce déterminant, c'est-à-dire que *le déterminant s'annulera ainsi que ses mineurs des $m-n-1$ premiers ordres.*

Nous venons de voir que la condition nécessaire pour qu'il y ait une fonction rationnelle $F(x, y)$ satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n, c'est qu'il existe des nombres b_1, b_2, b_m dont le déterminant satisfasse à la condition que je viens d'énoncer. Je dis que cette condition est également suffisante.

Supposons en effet qu'elle soit remplie et soit $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; envisageons la combinaison

$$b_1\Phi(z\sigma_1^{-1}) + b_2\Phi(z\sigma_2^{-1}) + \ldots + b_m\Phi(z\sigma_m^{-1}) = \Theta(z).$$

Nous pouvons toujours choisir $\Phi(z)$ de telle façon que $\Theta(z)$ ne soit pas identiquement nulle; il suffit par exemple de supposer que $\Phi(z)$ admet le pôle $z=\beta$, sans admettre aucun des pôles

$$z=\beta\sigma_2, \qquad z=\beta\sigma_3, \qquad \ldots, \qquad z=\beta\sigma_m.$$

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(z\sigma) = \sum b_i\Phi(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i\Phi(z\sigma_k^{-1}) = \sum b_k(\sigma)\Phi(z\sigma_k^{-1})$$

si l'on suppose

$$\sigma_i\sigma^{-1} = \sigma_k S = S'\sigma_k,$$

S et S' appartenant à G.

Ainsi $\Theta(z\sigma)$ est formé comme $\Theta(z)$, sauf que les coefficients b_k sont remplacés par les coefficients $b_k(\sigma)$.

Or, par hypothèse, il y a, entre les quantités $b_k(\sigma)$, $m-n$ relations linéaires de la forme

$$(6) \qquad \sum A\, b_1(\sigma) = \sum A\, b_2(\sigma) = \ldots = \sum A\, b_m(\sigma) = 0.$$

On aura donc également les $m-n$ relations

$$\sum A\,\Theta(z\sigma) = 0,$$

ce qui veut dire que la fonction $\Theta(z)$ satisfera à une équation linéaire d'ordre n. C. Q. F. D.

Soit alors $K(z)$ une intégrale de première espèce quelconque: posons

$$G(z) = \sum b_i K(z\sigma_i^{-1}):$$

$G(z)$ sera aussi une intégrale de première espèce et nous aurons

$$\begin{aligned} G(z\sigma) &= \sum b_i K(z\sigma\sigma_i^{-1}) \qquad = \sum b_i K(z\sigma_k^{-1} S) \\ &= \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1} S) = \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}) + \text{const.}, \end{aligned}$$

car, S appartenant à G, on aura

$$K(zS) - K(z) = \text{const.}$$

On a donc, à cause des équations (6),

$$(7) \qquad \sum A\, G(z\sigma) = \text{const.}$$

Observons, avant d'aller plus loin, qu'il résulte de nos définitions que

$$b_k(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = b_1(\sigma_i) = b_i(\sigma_1) = b_i.$$

et d'ailleurs le sous-groupe G' étant invariant, on aura, pour une substitution S quelconque de G',

$$b_k(\sigma_i) = b_k(S\sigma_i) = b_k(\sigma_i S).$$

Soit alors

$$G(zS\sigma) - G(z\sigma) = \omega(\sigma).$$

Alors $\omega(\sigma)$ sera une constante, puisque ce sera une période de l'intégrale de première espèce $G(z)$ et l'on aura

$$\sum A\, \omega(\sigma) = 0,$$

en mettant en évidence les indices

$$(8) \qquad \sum A_i \omega(\sigma_i) = 0.$$

Observons que $\omega(\sigma_1)$ est la période de $G(z)$ qui correspond à S, tandis que $\omega(b_i)$ est la période de $G(z)$ qui correspond à la substitution $\sigma_i^{-1} S \sigma_i$, laquelle appartient aussi au sous-groupe G'.

Donc $\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i)$ correspondra à la substitution $\sigma_i^{-1}\sigma_k S \sigma_k^{-1}\sigma_i$. Or je puis répéter le même raisonnement qui m'a conduit à l'équation (8) en remplaçant S par $\sigma_k S \sigma_k^{-1}$: j'obtiendrai

$$\sum A_i \omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = 0.$$

Si alors je pose

$$\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = \omega_k(\sigma_i),$$

j'aurai, en supprimant les indices i,

$$(9) \qquad \sum A\,\omega_1(\sigma) = \sum A\,\omega_2(\sigma) = \ldots = \sum A\,\omega_m(\sigma) = 0.$$

On voit qu'il y a entre les ω les mêmes relations qu'entre les b : les périodes de l'intégrale $G(z)$ peuvent donc jouer le rôle des b.

Tout ce qui précède deviendrait illusoire si $G(z)$ se réduisait à une constante.

Nous sommes donc conduit à nous poser la question suivante :

Peut-il arriver que, quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie, on ait

$$(10) \qquad \sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Soient alors a un nombre quelconque, $a\sigma_i^{-1}$ un de ses transformés, et soit

$$\frac{d(a\sigma_i^{-1})}{da} = c_i.$$

Soit $K'(z) = \frac{dK}{dz}$ la dérivée de K ; nous aurons

$$\sum b_i \frac{d(z\sigma_i^{-1})}{dz} K'(z\sigma_i^{-1}) = 0,$$

ou, en faisant $z = a$,

$$\sum b_i c_i K'(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie; nous aurons en particulier

$$\sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

$\varphi(a)$ étant la fonction qui figure dans la relation (3), puisque nous avons vu que cette fonction est la dérivée d'une intégrale de première espèce.

Posons alors

$$\sum b_i c_i P(z, a\sigma_i^{-1}) = H(z);$$

nous aurons, en vertu de la relation (3),

$$H(zS) - H(z) = \sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire que toutes les périodes de $H(z)$ seront nulles, c'est-à-dire que $H(z)$ sera une fonction fuchsienne de z et une fonction rationnelle de x et de y. Quant à ses pôles $z = a\sigma^{-1}$, ils correspondront tous à une même valeur de x, $x = x_0$, puisque x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, ne changeant pas par conséquent quand on change z en $z\sigma_i^{-1}$. Nous pouvons d'ailleurs supposer que x_0 est fini, puisque a est arbitraire. Tous les pôles sont d'ailleurs simples.

Il y a donc deux cas concevables :

1° On bien on peut choisir des intégrales de première espèce telles que, en formant avec leurs périodes un déterminant de groupe de la façon que nous avons dite, ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des $m - n - 1$ premiers ordres.

2° On bien les nombres b sont tels que, pour toutes les intégrales de première espèce $K(z)$, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Nous verrons plus loin que les deux cas peuvent se réaliser.

Quoi qu'il en soit, nous devons retenir les résultats suivants :

1° Quand on passe de l'intégrale $K(z)$ à l'intégrale $K(z\sigma)$, les périodes de cette intégrale subissent une substitution linéaire. *L'ensemble de ces substitutions linéaires dont les coefficients sont des entiers forme un groupe isomorphe à* H.

2° Il y a entre les périodes des intégrales abéliennes un certain nombre de relations. On pourra obtenir de semblables relations de deux manières :

1° Si les nombres b ne sont pas tels que $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$, on en obtiendra en écrivant que le déterminant de groupe formé comme nous l'avons dit est nul ainsi que ses mineurs des $m - n - 1$ premiers ordres.

2° On sait que, entre les périodes de deux intégrales quelconques de première espèce $K(z)$ et $K'(z)$, il y a une relation bilinéaire due à Riemann.

Si nous prenons $K'(z) = K(z\sigma)$, les périodes de $K(z)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$. Si nous substituons ces combinaisons dans la relation de Riemann à la place des périodes de $K'(z)$, nous aurons entre les périodes de $K(z)$ une relation quadratique à coefficients entiers.

§ 4. — Étude d'un exemple particulier.

Avant d'aller plus loin, je veux appliquer ce qui précède à un exemple simple, et je choisirai un groupe qui a été étudié en détail par M. Klein. Je veux parler du groupe de la résolvante de Galois de l'équation modulaire du septième ordre. Le groupe de Galois de cette résolvante est isomorphe au groupe qui permute les lettres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \infty$$

de la manière suivante. Une substitution quelconque de ce groupe changera la lettre z (où $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou ∞) en z', où

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \pmod{7}.$$

α, β, γ, δ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{7}.$$

Ce groupe (qui est alors isomorphe à notre groupe H) est d'ordre 168 et peut être considéré comme dérivé de deux substitutions fondamentales

$$\Sigma_2 = (z,\ z+1), \qquad \Sigma_3 = \left(z,\ \frac{5z+2}{z+2}\right).$$

Entre ces deux substitutions, nous avons les relations fondamentales

$$(1) \qquad \Sigma_2^2 = \Sigma_3^7 = (\Sigma_2 \Sigma_3)^3 = 1,$$

et nous en avons encore d'autres, parmi lesquelles je citerai seulement la suivante :

$$(\Sigma_2 \Sigma_3^3)^4 = 1.$$

Construisons maintenant le groupe fuchsien G, auquel H est mériédriquement isomorphe. Pour cela, nous n'aurons qu'à le faire dériver de deux substitutions fondamentales σ_2 et σ_3, entre lesquelles auront lieu les relations fondamentales suivantes, identiques aux relations (1) :

$$(1\ bis) \qquad \sigma_2^2 = \sigma_3^7 = (\sigma_2 \sigma_3)^3 = 1.$$

Le polygone fuchsien correspondant R_0 est un quadrilatère formé de deux triangles symétriques l'un de l'autre (je veux dire symétriques au sens de la Géométrie non euclidienne). Pour chacun de ces triangles, les trois angles sont :

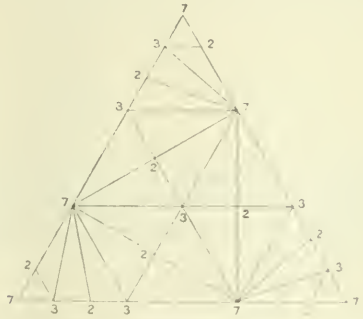
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{7}.$$

Formons maintenant le sous-groupe G', ce sera encore un groupe fuchsien dont le polygone générateur R_0 sera décomposable en

168 quadrilatères égaux à R_0 (toujours au point de vue non euclidien) ou en 336 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

M. Klein a construit ce polygone qui a 14 côtés et est décomposable en 14 triangles équilatéraux égaux dont les angles sont égaux à $\frac{\pi}{7}$. Chacun de ces 14 triangles se décompose lui-même en 24 triangles dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

Il suffira de représenter ici l'un de ces 14 triangles. J'ai fait cette représentation schématiquement en remplaçant les triangles curvi-



lignes par des triangles rectilignes; j'ai marqué chaque point par les chiffres 2, 3 ou 7, selon que les angles des triangles qui y aboutissent sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{7}$.

La décomposition de chaque triangle se déduit d'ailleurs aisément de celle du triangle contigu, si l'on observe que les deux figures représentant la décomposition de ces deux triangles sont symétriques par rapport au côté commun.

Il reste à définir la façon dont les quatorze côtés du polygone Π sont conjugués.

Pour cela, numérotons ces côtés en faisant le tour du polygone dans le sens direct.

M. Klein a démontré que les côtés

$$1,10, \quad 3,12, \quad 5,14, \quad 7,2, \quad 9,4, \quad 11,6, \quad 13,8$$

sont conjugués.

On voit que les sommets forment deux cycles, l'un comprenant tous les sommets de rang pair, l'autre tous les sommets de rang impair. La somme des angles pour chacun de ces cycles est 2π. D'après la formule bien connue, le genre q est égal à 3.

Soit maintenant $K(z)$ une intégrale abélienne quelconque de première espèce engendrée par le groupe G' et étudions ses périodes.

Soit ε_1 l'intégrale prise le long des côtés 1 et 2,
ε_2 » 3 et 4,
ε_3 » 5 et 6,
ε_4 » 7 et 8,
ε_5 » 9 et 10,
ε_6 » 11 et 12,
ε_7 » 13 et 14.

Ce seront des périodes; car, quand on a parcouru deux côtés consécutifs du polygone, on est passé d'un sommet de rang pair à un sommet de rang impair, c'est-à-dire *appartenant au même cycle*. De plus, on a

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 = 0,$$

car l'intégrale prise le long du polygone entier doit être nulle.

Soient maintenant

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \zeta_4, \quad \zeta_5, \quad \zeta_6, \quad \zeta_7$$

les périodes qui correspondent aux substitutions qui changent respectivement les côtés

1 en 10, 2 en 12, 5 en 14, 7 en 2, 9 en 4, 11 en 6, 13 en 8,

nous aurons

$$\zeta_1 = -\varepsilon_6 - \varepsilon_7, \quad \zeta_2 = -\varepsilon_7 - \varepsilon_1, \quad \zeta_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \zeta_4 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$
$$\zeta_5 = -\varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \zeta_6 = -\varepsilon_4 - \varepsilon_5, \quad \zeta_7 = -\varepsilon_5 - \varepsilon_6.$$

Soit maintenant une seconde intégrale $K'(z)$ ayant pour périodes ζ' et ζ'_1, de sorte que l'on ait

$$\zeta'_1 = -\varepsilon'_6 - \varepsilon'_7, \qquad \ldots$$

L'intégrale

$$\int K' dK,$$

prise le long du polygone entier devra être nulle, de sorte qu'on aura

$$\zeta'_1\alpha_1 + \zeta'_2\alpha_3 + \zeta'_3\alpha_5 + \zeta'_4\alpha_7 + \zeta'_5\alpha_9 + \zeta'_6\alpha_{11} + \zeta'_7\alpha_{13} = 0,$$

en désignant par α_i l'intégrale K prise le long du côté i, de telle sorte que

$$\alpha_1 + \alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_{12} = \ldots = 0.$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_7, \qquad \varepsilon_2 = \alpha_3 - \alpha_9, \qquad \varepsilon_3 = \alpha_5 - \alpha_{11}, \qquad \varepsilon_4 = \alpha_7 - \alpha_{11},$$

$$\varepsilon_5 = \alpha_9 - \alpha_1, \qquad \varepsilon_6 = \alpha_{11} - \alpha_3, \qquad \varepsilon_7 = \alpha_{13} - \alpha_5.$$

En remplaçant les ζ' et les α en fonctions des ε et des ε', on trouve :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1\varepsilon'_2 - \varepsilon_2\varepsilon_4 + \varepsilon_4\varepsilon'_3 - \varepsilon_3\varepsilon'_4 + \varepsilon_4\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon_4 + \varepsilon_4\varepsilon_6 - \varepsilon_6\varepsilon_4 + \varepsilon_2\varepsilon'_3 \\ -\varepsilon_3\varepsilon'_5 + \varepsilon_2\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_2 + \varepsilon_4\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon'_4 + \varepsilon_4\varepsilon' - \varepsilon_6\varepsilon_4 - \varepsilon_3\varepsilon'_5 - \varepsilon_6\varepsilon'_3 = 0, \end{array}\right.$$

que je pourrai écrire sous la forme symbolique :

$$(2\,bis)\quad (12)+(13)+(15)+(16)+(23)+(26)+(45)+(46)+(56)=0$$

Je remarque que, si nous posons

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_6 = \gamma_1, \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \gamma_2, \qquad \varepsilon_4 = \gamma_3,$$

$$\varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \gamma_4, \qquad \varepsilon_3 = \gamma_5, \qquad \varepsilon_5 = \gamma_6,$$

la relation (2) devient

$$\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1 + \gamma_3\gamma'_4 - \gamma_4\gamma'_3 + \gamma_5\gamma'_6 - \gamma_6\gamma'_5 = 0,$$

c'est-à-dire que les périodes γ sont les *périodes normales*.

Examinons maintenant l'effet des diverses substitutions du groupe G. Parmi les points de notre polygone, nous distinguons, en particulier, les points (7), c'est-à-dire les points qui sont sommets de quatorze triangles avec un angle $\frac{\pi}{7}$; nous avons d'abord le centre de notre polygone, puis ses quatorze sommets; nous en avons, en outre, un sur chaque côté et un sur chacun des quatorze rayons allant du centre aux sommets. Mais les différents sommets de rang impair ne sont pas réellement distincts, puisqu'ils font partie d'un même cycle et qu'ils sont, par conséquent, *congruents*, c'est-à-dire transformables les uns dans les autres par une substitution du sous-groupe G'. De même pour les sommets de rang pair; de même enfin pour les deux points (7) situés sur deux côtés conjugués.

Nous aurons donc en tout vingt-quatre points (7) réellement distincts.

Considérons la substitution σ_3; c'est une rotation (au sens non euclidien) d'un angle $\frac{2\pi}{7}$ autour du centre du polygone. Cette rotation transforme les uns dans les autres les sommets de rang pair, de même que ceux de rang impair, de sorte qu'elle transforme chacun de ces sommets en un point congruent. Cela nous amène à distinguer parmi nos vingt-quatre points (7) ceux qui correspondent au centre et aux sommets du polygone; je les appellerai les *points* A.

Nous sommes donc conduits à répartir nos vingt-quatre points (7) en huit groupes comprenant chacun trois points (7) distincts; nous les appellerons les points A, les points B, ..., les points H.

Numérotons les sommets, les rayons du polygone dans le sens direct, comme nous avons fait pour les côtés; faisons de même pour les quatorze secteurs ou triangles dans lesquels on peut décomposer ce polygone, et cela de telle sorte que les sommets du côté 1 soient les sommets 1 et 2 et que le secteur 1 soit compris entre le côté 1 et les rayons 1 et 2.

Cela posé, les trois points B seront les points (7) qui se trouvent sur le côté 1 et sur les rayons opposés 6 et 13; les trois points C se trouveront sur le côté 3 et sur les rayons opposés 8 et 1; les trois points D se trouveront sur le côté 5 et sur les rayons opposés 10 et 3; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points A change tout point A en un point A, et conserve, par conséquent, la lettre A, et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres; de même une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points B conserve la lettre B et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres.

Plus généralement, une substitution quelconque de G permutera d'une certaine manière nos huit lettres; de telle sorte que, si elle change, par exemple, un point A en un point B, elle changera tous les autres points A en des points B.

Ces permutations de 8 lettres formeront un groupe qui ne sera autre chose que notre groupe $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ de 168 substitutions.

Nous distinguerons en particulier la substitution de σ_1 qui correspond à $(z, z+1)$, la substitution σ_2 qui correspond à $\left(z, \frac{5z-2}{z+3}\right)$, et la substitution σ_3 qui est une combinaison des deux premières et que je définirai comme il suit :

C'est une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de figure du secteur 1, lequel secteur, représenté d'ailleurs sur la figure 1, est, comme nous le savons, un triangle équilatéral. Cette substitution conserve les lettres A et D et permute les autres de la façon suivante :

$$(A)(D)(GCB)(EFH).$$

Chacune des substitutions σ de G change R_0 en un polygone R_0' égal à R_0 (au point de vue non-euclidien) et qui pourrait tout aussi bien que R_0 engendrer le groupe fuchsien G.

Soient toujours $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$ les périodes de l'intégrale

$$K(z) - K(z\sigma_1)$$

et soit σ une substitution quelconque de G; quelles seront les périodes correspondantes de l'intégrale de première espèce $K(z\sigma)$? Si z décrit une courbe quelconque, $z\sigma$ décrira la transformée de cette courbe

par σ; si donc z décrit deux côtés contigus de R'_0, $z\sigma$ décrira les deux côtés contigus correspondants de R''_0; la première période de $K(z\sigma)$ sera donc l'intégrale K prise le long des deux côtés 1 et 2 du polygone R''_0.

En appliquant cette règle, on trouve que les 7 périodes de $K(z\sigma_3)$ sont

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1;$$

celles de $K(z\sigma_3^2)$ sont

$$\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2,$$

et ainsi de suite; celles de $K(z\sigma_4)$ sont (lire le Tableau dans le sens horizontal)

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6, & \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 + \varepsilon_1, \\
\varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5, \\
\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, & \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\
\varepsilon_7 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4; &
\end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2)$ sont

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon_4 + \varepsilon_5, & \varepsilon_3 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, & -\varepsilon_3, & -\varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6, \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6, & -\varepsilon_6, & \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6; &
\end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2\sigma_3)$ seront

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon_5 + \varepsilon_6, & \varepsilon_4 + \varepsilon_7 + \varepsilon_1, & -\varepsilon_1, & -\varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7, \\
\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, & -\varepsilon_7, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_7, &
\end{array}$$

et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons la relation (2) et remplaçons $K(z)$ successivement par $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$, $K(z\sigma_3^3)$, $K(z\sigma_2)$, $K(z\sigma_2\sigma_3)$, $K(z\sigma_4)$.

Nous pouvons supposer que K ait été choisi de telle sorte que les trois premières périodes soient 1, 0, 0; nous appellerons les trois suivantes x, y, z, de sorte que la septième sera $-1-x-y-z$.

Alors les six premières périodes seront :

pour $K(z)$,

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad x, \quad y, \quad z;$$

pour $K(z\sigma_3)$,

$$0, \quad 0, \quad x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z.$$

pour $K(z\sigma_3^2)$,

$$0, \quad x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z, \quad 1;$$

pour $K(z\sigma_3^3)$,

$$x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z, \quad 1, \quad 0;$$

pour $K(z\sigma_2)$,

$$x+y, \quad -1-x-y, \quad 0, \quad -y-z, \quad 1+y+z, \quad -z;$$

pour $K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$y+z, \quad -y-z, \quad -x, \quad 1+x+y, \quad -1-x-y, \quad 1+x+y+z;$$

pour $K(z\sigma_4)$,

$$y+z, \quad -z, \quad -1-x-y, \quad 1+x+y, \quad 1-y, \quad y+z-1.$$

On obtient ainsi, par la relation (2), six relations quadratiques en x, y, z qui sont (en changeant les signes au besoin)

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} x^2+2y^2+z^2+2yz+2xy+2y+x+1 &= 0, \\ x(x+y+z) &= y, \\ y^2+z^2+yz+x+2y+z+1 &= 0, \\ 0 &= 0, \\ (y+x)(z-1)-y(y-z) &= 0, \\ y^2+xy+yz+x-y+1 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le point x, y, z doit donc se trouver sur cinq surfaces du second degré; or ces cinq surfaces n'ont que deux points communs qui nous sont donnés par

$$x = 1, \qquad z = -1, \qquad y^2 + y + 2 = 0.$$

L'équation en y admet deux racines

$$y = \mathrm{T} = \tau + \tau^2 + \tau^4,$$
$$y = \mathrm{T}' = \tau^3 + \tau^5 + \tau^6,$$
$$\tau = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7},$$

d'où

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}' + 1 = 0, \qquad \mathrm{TT}' = 2 \quad (^1).$$

Au groupe H vont se trouver liés deux groupes *linéaires* remarquables, qui lui sont isomorphes.

Le premier est celui qui lie les périodes de $\mathrm{K}(z\sigma)$ à celles de $\mathrm{K}(z)$: par sa nature même, il ne peut contenir que des substitutions à coefficients entiers. Comme le nombre des périodes est de sept, mais qu'il n'y en a que six distinctes, c'est un groupe linéaire à six variables.

Nous prendrons les périodes ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6, et nous trouverons, pour la substitution correspondant à σ_2,

$$\sigma'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

(1) Quelle est celle de ces deux racines qui convient? Il suffit de se rappeler que si K_1 et K_2 sont les parties réelle et imaginaire de K, l'intégrale $\int \mathrm{K}_1\, d\mathrm{K}_2$ prise le long du périmètre du polygone. Or cette intégrale, si $x = 1$, $z = -1$, sera trois fois la partie imaginaire de y; nous devons donc prendre $y = \mathrm{T}$.

et, pour la substitution correspondant à σ_3,

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que le groupe dérivé de ces deux substitutions linéaires σ_2^1 et σ_3^1 est d'ordre 168 et isomorphe à H.

Le second groupe est celui que subissent les dérivées des intégrales abéliennes de première espèce; c'est un groupe linéaire à trois variables: c'est celui que M. Jordan avait d'abord oublié dans son énumération, que M. Klein avait deviné et que M. Jordan avait enfin retrouvé dans une analyse plus complète.

Nous avons vu quelles sont les périodes de nos diverses intégrales :

$$\begin{array}{ll} K(z), & 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ T,\ -1,\ T; \\ K(z\sigma_3), & 0,\ 0,\ 1,\ T,\ -1,\ T,\ 1; \\ K(z\sigma_3^2), & 0,\ 1,\ T,\ -1,\ T,\ 1,\ 0; \\ K(z\sigma_3^3), & 1,\ T,\ -1,\ T,\ 1,\ 0,\ 0. \end{array}$$

Nous tirons de là

$$K(z\sigma_3^1) = K(z) + (T+1)K(z\sigma_3) + TK(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$

car il est aisé de vérifier que les périodes de

$$K(z\sigma_3^3) - K(z) - (T+1)K(z\sigma_3) - TK(z\sigma_3^2)$$

sont nulles.

Il résulte de là que quand z se change en $z\sigma_3$ les dérivées des trois intégrales $K(z)$, $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$ subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T+1 & T \end{vmatrix},$$

dont la période est 7 (les racines de l'équation en S sont τ, τ^2, τ^4).

Voici maintenant les périodes des intégrales suivantes :

$K(z\sigma_2)$,

$$T+1, \quad -T-2, \quad 0, \quad 1-T, \quad T, \quad 1, \quad -1,$$

$K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$T-1, \quad 1-T, \quad -1, \quad T+2, \quad -T-2, \quad T+1, \quad -T,$$

$K(z\sigma_2\sigma_3^2)$,

$$-T-2, \quad T+1, \quad -T, \quad T-1, \quad 1-T, \quad -1, \quad T+2;$$

d'où les relations

$$\begin{aligned} K(z\sigma_2) &= (T+1)K(z) \\ &\quad + (T-2)K(z\sigma_3) + (-T-2)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\ K(z\sigma_2\sigma_3) &= (T-1)K(z) \\ &\quad + (-2T-3)K(z\sigma_3) + (1-T)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\ K(z\sigma_2\sigma_3^2) &= (-T-2)K(z) \\ &\quad + (2-T)K(z\sigma_3) + (T+1)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que quand z se change en $z\sigma_2$, les dérivées de nos trois intégrales subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} T+1 & T-2 & -T-2 \\ T-1 & -2T-3 & 1-T \\ -T-2 & 2-T & T+1 \end{vmatrix},$$

dont la période est 2.

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$J_m = \sum_{p=0}^{p=6} K(z\sigma_3^p)\tau^{mp},$$

où m prend l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il est clair que si la première période de cette intégrale est ω, les autres seront

$$\omega\tau^{-m}, \quad \omega\tau^{-2m}, \quad \omega\tau^{-3m}, \quad \omega\tau^{-4m}, \quad \omega\tau^{-5m}, \quad \omega\tau^{-6m}.$$

Mais il peut se faire que cette intégrale se réduise à une constante; c'est ce qui arrive si $\omega = 0$.

Or il est aisé de vérifier que $\omega = 0$ pour

$$m = 0, \qquad m = 1, \qquad m = 2, \qquad m = 4,$$

mais que $\omega \gtrless 0$ pour

$$m = 3, \qquad m = 5, \qquad m = 6.$$

Il y a donc des intégrales dont les sept périodes sont

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau, & \tau^2, & \tau^3, & \tau^4, & \tau^5, & \tau^6, \\
1, & \tau^2, & \tau^4, & \tau^6, & \tau^8 = \tau, & \tau^{10} = \tau^3, & \tau^{12} = \tau^5, \\
1, & \tau^4, & \tau^8 = \tau, & \tau^{12} = \tau^5, & \tau^{16} = \tau^2, & \tau^{20} = \tau^6, & \tau^{24} = \tau^3,
\end{array}$$

mais il n'y en a pas dont les périodes soient

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau^3, & \tau^6, & \tau^9, & \tau^{12}, & \tau^{15}, & \tau^{18}, \\
1, & \tau^5, & \tau^{10}, & \tau^{15}, & \tau^{20}, & \tau^{25}, & \tau^{30}, \\
1, & \tau^6, & \tau^{12}, & \tau^{18}, & \tau^{24}, & \tau^{30}, & \tau^{36}, \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1.
\end{array}$$

Une dernière remarque :

L'intégrale $K(z)$ n'a que deux périodes distinctes, 1 et T; elle est

donc réductible aux intégrales elliptiques. Les périodes de $K(z\sigma)$, où σ est une substitution quelconque de G, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers; il en est de même de celles de l'intégrale

$$U = \sum AK(z\sigma),$$

où les A sont des coefficients entiers quelconques et où la sommation s'étend aux 168 substitutions *distinctes* de G.

Les périodes de U sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers de 1 et de T; cette intégrale est donc réductible aux intégrales elliptiques; *de sorte qu'il y a une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.*

§ 5. — Théorèmes de Cartan et Frobenius.

Nous aurons besoin dans la suite de divers résultats obtenus par M. Cartan dans un Mémoire intitulé : *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. XII) et par M. Frobenius dans une série de Mémoires publiés dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin de 1896 à 1901.

Rappelons ces résultats succinctement en insistant un peu sur certains points pour faire voir comment s'éclairent mutuellement les théorèmes de M. Cartan, d'une part, ceux de MM. Dedekind et Frobenius, d'autre part.

Considérons un système d'unités complexes

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_r,$$

dont la multiplication soit associative et non commutative; ces unités donneront naissance à un système S de nombres complexes. Je supposerai qu'il y a dans ce système un *module*, c'est-à-dire un nombre complexe

$$a = \sum a_i e_i$$

tel que l'on ait

$$ax = xa = x,$$

quel que soit le nombre complexe x.

Soient maintenant

$$x = \sum x_i e_i \qquad y = \sum y_i e_i$$

deux nombres complexes quelconques, et soit

$$z = xy = \sum z_i e_i.$$

Il est clair que les z_i seront des fonctions linéaires des y_i, de sorte qu'à chaque nombre complexe x correspondra une transformation linéaire $T(x)$ qui transformera les y_i en z_i et dont les coefficients seront des fonctions linéaires et homogènes des x_i.

Soit maintenant l'équation

$$xy = \omega y,$$

où ω est un nombre ordinaire; je puis l'écrire

$$(x - \omega a)y = 0,$$

ce qui exige que le déterminant de la transformation $T(x - \omega a)$ soit nul. Ce déterminant, je l'appellerai $\Delta(x - \omega a)$.

L'équation

$$\Delta(x - \omega a) = 0$$

est une équation de degré r en ω que M. Cartan appelle l'*équation caractéristique*.

Si l'une des racines de cette équation est nulle, il existera un nombre y qui, multiplié (à gauche) par x, donne un produit nul, de telle sorte que

$$xy = 0$$

et que x peut s'appeler un diviseur de zéro (à gauche); mais M. Cartan ayant démontré qu'un diviseur de zéro (à gauche) est en même temps un diviseur de zéro (à droite), nous pourrons dire simplement un *diviseur de zéro*.

Si *toutes* les racines sont nulles, M. Cartan dit que x est *pseudonul*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit pseudo-nul, c'est qu'une de ses puissances entières soit nulle.

Cela posé, supposons qu'on prenne pour unités complexes r nombres complexes quelconques du système S au lieu de $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Soient

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r$$

ces nouvelles unités complexes qui seront des combinaisons linéaires des anciennes.

Soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_i e'_i, \qquad y = \sum y_i e_i = \sum y'_i e'_i.$$

$$z = xy = \sum z_i e_i = \sum z'_i e'_i.$$

Que deviendra la substitution $T(x)$ qui changeait les y_i en z_i? elle devra être remplacée par une substitution $T'(x)$ qui changera les y'_i en z'_i. Soit U la substitution linéaire qui change les y_i en y'_i; elle changera également les z_i en z'_i; de sorte qu'on aura

$$T'(x) = U^{-1} T(x) U.$$

c'es-à-dire que T′ est la transformée de T par U.

On peut choisir les nouvelles unités complexes de façon à réduire le système S à sa forme la plus simple. C'est ce que M. Cartan a réussi à faire.

Pour cela, il introduit la notion de sous-système; l'ensemble des combinaisons linéaires de q nombres complexes appartenant à S formera un sous-système σ de S si $q < r$; ce sous-système sera semi-invariant à droite si le produit (à droite) d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de S appartient à σ; on définit de même la semi-invariance à gauche; enfin on dit qu'un système est invariant s'il est semi-invariant à la fois à droite et à gauche.

Cela posé, M. Cartan a montré qu'un système simple, c'est-à-dire un système qui ne contient aucun sous-système invariant, ne peut être que ce qu'il appelle un p^2 ion, c'est-à-dire un système à p^2 unités

e_{ij} $(ij = 1, 2, \ldots, p)$ avec la loi de multiplication

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij}e_{lk} = 0 \qquad (j \geq l).$$

Parmi les systèmes qui ne sont pas simples, il distingue d'abord les systèmes semi-simples qui admettent toutes les unités de plusieurs p^2 ions, et cela de telle façon que le produit de deux nombres complexes appartenant à deux p^2 ions différents soit toujours nul.

Enfin les systèmes qui ne sont ni simples, ni semi-simples, admettront toutes les unités d'un système semi-simple et, en outre, un certain nombre d'unités pseudonulles, dont les combinaisons linéaires forment un sous-système invariant dont tous les nombres sont pseudonuls.

Reprenons le déterminant $\Delta(x)$ que nous avons défini plus haut, et décomposons-le en facteurs irréductibles. A chacun des p^2 ions correspondra un de ces facteurs, qui sera de degré p et qui sera élevé à une puissance égale à p si le système est semi-simple et supérieure à p dans le cas contraire.

Tels sont les résultats de M. Cartan. Voyons comment ils peuvent être appliqués à la théorie des groupes.

Considérons un groupe d'ordre fini G; aux différentes substitutions faisons correspondre des unités complexes, dont la loi de multiplication soit la même que celle des substitutions. Je veux dire que, si les unités e_i, e_j, e_k correspondent respectivement aux substitutions σ_i, σ_j, $\sigma_i\sigma_j$, on ait

$$e_i e_j = e_k.$$

Cette loi est évidemment associative. Envisageons le système de nombres complexes S engendré par ces unités et, d'abord, formons l'équation caractéristique et le déterminant $\Delta(x)$ correspondant, ainsi que la substitution linéaire $T(x)$.

Soit

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_k e_k, \qquad z = xy = \sum z_j e_j,$$

il vient

$$z = \sum x_i y_k e_j, \qquad z_j = \sum x_i y_k \qquad (e_j = e_i e_k).$$

Convenons d'adopter la notation si commode de M. Frobenius et de poser

$$x_i = x_{j,k} \quad \text{si} \quad e_i = e_k^{-1} e_j;$$

la transformation $T(x)$ s'écrira

$$z_j = \sum x_{j,k} y_k,$$

de telle sorte que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne dans $\Delta(x)$ sera $x_{j,k}$.

Ce déterminant $\Delta(x)$ sera donc un de ceux que M. Frobenius appelle *déterminants de groupe*; nous en avons vu plus haut un exemple au paragraphe 3.

Ainsi l'on voit déjà apparaître un lien entre les travaux de M. Cartan, ceux de M. Frobenius et la question qui nous occupe ici.

Observons qu'il y a dans le système S certains nombres ξ qui jouissent de la propriété d'être *commutables* à tous les nombres du système; je veux dire que l'on aura

$$\xi x = x \xi,$$

x étant un nombre quelconque du système S.

Nous savons, en effet, que les substitutions du groupe G se répartissent en un certain nombre de *classes*, de telle façon que toutes les transformées d'une même substitution par toutes les substitutions de G appartiennent à une même classe.

La somme de toutes les unités complexes correspondant aux diverses substitutions d'une même classe sera un nombre commutable; et tous les nombres commutables seront des combinaisons linéaires des nombres ainsi obtenus.

Ces nombres commutables formeront évidemment un sous-système de nombres complexes à multiplication commutative. C'est ce sous-système que M. Frobenius a étudié dans son premier Mémoire [*Ueber Gruppencharaktere* (*Sitzungsberichte* de Berlin, t. II, 1896)].

Cela posé, on peut se demander si le système S est semi-simple au sens de M. Cartan. La réponse doit être affirmative; en effet, s'il n'était pas semi-simple, il contiendrait un sous-système invariant

pseudonul. Or, si un pareil sous-système existait, il contiendrait au moins un nombre commutable. Soit, en effet, $x = \sum x_i e_i$ un nombre quelconque de ce sous-système. Tous les coefficients x_i ne peuvent pas être nuls.

Supposons donc $x_k > 0$.

Soit σ_k la substitution de G qui correspond à l'unité e_k, et désignons par e_k^{-1} l'unité qui correspond à la substitution inverse σ_k^{-1}. Nous aurons

$$e_k e_k^{-1} = e_1,$$

e_1 étant l'unité qui correspond à la substitution identique. Le nombre

$$x e_k^{-1}$$

fait partie du sous-système, puisque ce sous-système est invariant. Dans ce nombre complexe, le coefficient de e_1 est égal à x_k. De même les nombres

$$e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

(où e_j est une quelconque de nos unités) feront partie du sous-système et le coefficient de e_1 sera égal à x_k. Enfin le nombre

$$y = \sum e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

fait partie du sous-système; *il devrait donc être pseudonul;* d'ailleurs le coefficient de e_1 est égal à $r.x_k$ (r étant l'ordre du groupe G) et, par conséquent, différent de zéro. Donc le nombre y n'est pas nul. De plus, il est aisé de voir que ce nombre y est commutable.

Si donc il y avait un sous-système invariant pseudonul, il y aurait un nombre commutable pseudonul.

Or M. Frobenius a montré qu'il n'y avait pas de nombre commutable pseudonul, ou plutôt il a montré, ce qui revient au même, que le déterminant de certaines quantités qu'il appelle les p_{23} n'est pas nul (*loc. cit.*, p. 990 et 991).

Donc le système S est semi-simple et réductible à un certain nombre de p^2 ions. Or on conclura immédiatement que chaque facteur irre-

ductible du déterminant $\Delta(x)$ est affecté d'un exposant égal à son degré. C'est le théorème fondamental établi d'une manière un peu différente par M. Frobenius dans son second Mémoire [*Ueber die Prinfactoren der Gruppendeterminante* (*Sitz.* de Berlin, t. II. 1896)].

Chaque p^2 ion contient un nombre commutable et un seul; si, en effet, les unités $e'_{\alpha\beta}$ de ce p^2 ion sont choisies de telle sorte que

$$e'_{ij}e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij}e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

le nombre

$$e'_{11} + e'_{22} + \ldots + e'_{pp}$$

sera commutable à toutes les unités du p^2 ion, et il n'y en aura pas d'autres.

Il sera d'ailleurs commutable également aux unités des autres p^2 ions; car nous savons que le produit de deux nombres appartenant à deux p^2 ions différents est toujours nul.

On peut conclure de là qu'il y a précisément autant de p^2 ions (ou autant de facteurs irréductibles de Δ) qu'il y a de nombres commutables distincts, c'est-à-dire qu'il y a de classes de substitutions dans le groupe G.

Cela posé, on peut appliquer au système S les procédés de M. Cartan et choisir de nouvelles unités

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r,$$

de façon à réduire le système autant que possible. On aura

$$r = \sum p^2,$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de p correspondant aux différents p^2 ions; et les unités de chaque p^2 ion seront choisies de telle sorte que

$$e'_{ij}e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij}e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

et que le produit de deux unités appartenant à deux p^2 ions différents soit nul.

Que devient alors la substitution linéaire $T(x)$; elle se transforme, comme on l'a vu, en

$$T'(x) = U^{-1}T(x)U,$$

U étant la substitution linéaire qui, dans un même nombre complexe, lie les coefficients des nouvelles unités e' à ceux des anciennes unités e; et alors on voit que la substitution $T'(x)$ se décompose en plusieurs substitutions linéaires simultanées.

Désignons les unités nouvelles e par une notation à trois indices

$$e'_{\alpha\beta\gamma};$$

le premier indice représente le numéro du p^2 ion auquel appartient l'unité, les deux autres indices distinguent les unes des autres les diverses unités d'un même p^2 ion. La loi de multiplication est alors

$$e'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\gamma\delta} = e'_{\alpha\beta\delta},$$

tous les autres produits étant nuls. Dans certains cas, le premier indice deviendra inutile et nous le supprimerons; quand il n'y aura que deux indices ce sera donc le premier indice qui aura été supprimé.

Cela posé, soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad y = \sum y_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma},$$

$$z = xy = \sum z_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il s'agit d'étudier la transformation $T'(x)$ qui change les y' en z. On trouve

$$z_{\alpha\beta\gamma} = \sum x'_{\alpha\beta\delta}y_{\alpha\delta\gamma},$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de δ.

Ainsi les variables z' dépendront uniquement des variables y' qui ont même premier indice et même dernier indice, ce qui montre que la transformation $T'(x)$ se décompose en $\sum p$ transformations linéaires partielles à p variables.

J'observe que si je conserve l'indice α et que je change l'indice γ, les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ ne changent pas. Les variables $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$ subissent donc *la même* transformation linéaire que les variables $y'_{\alpha\delta\gamma}$. Nos $\sum p$ substitutions linéaires partielles sont donc identiques p à p.

Nous devons nous poser maintenant une question. Quand arrive-t-il que le déterminant $\Delta(x)$ est nul ainsi que tous ses mineurs des $k-1$ premiers ordres? En effet, nous avons vu au paragraphe 3 que le déterminant de groupe formé par les quantités que nous avons appelées $b_i(\sigma)$ devait satisfaire à cette condition.

Si le déterminant $\Delta(x)$ y satisfait, il en sera de même du déterminant de la substitution $T'(x)$ qui n'en est qu'un transformé.

Considérons notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 — ion et supposons que ce soit un p_α^2 — ion. Supposons que le déterminant des p_α^2 quantités $x'_{\alpha\beta\gamma}$ soit nul ainsi que ses mineurs des $k_\alpha - 1$ premiers ordres, mais que les mineurs d'ordre supérieur ne soient pas tous nuls.

Envisageons l'équation $xy = 0$ qui peut s'écrire

$$\sum_\delta x'_{\alpha\beta\delta} y'_{\alpha\delta\gamma} = 0.$$

Considérons en particulier celles de ces équations qui se rapportent à une valeur donnée de α et à une valeur donnée de γ; elles sont au nombre de p_α correspondant aux différentes valeurs de l'indice β. Comme les mineurs du déterminant des x' sont nuls jusqu'à l'ordre $k_\alpha - 1$; parmi ces équations, $p_\alpha - k_\alpha$ seulement sont distinctes, de sorte que nos p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\gamma}$ dépendront encore de k_α arbitraires; il en sera de même des p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$, de sorte que les p_α^2 inconnues y' relatives à notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2-ion dépendent de $k_\alpha p_\alpha$ arbitraires et que les r inconnues y' dépendent en tout de

$$\sum k_\alpha p_\alpha = k$$

arbitraires.

En d'autres termes, le déterminant de $T'(x)$ [et par conséquent aussi le déterminant $\Delta(x)$] sera nul, ainsi que ses mineurs des $k-1$ premiers ordres.

En d'autres termes encore, l'équation $xy = 0$ admet k solutions distinctes, de sorte qu'on a

$$xy^{(1)} = xy^{(2)} = \ldots = xy^{(k)} = 0,$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ étant k nombres complexes linéairement indépendants, c'est-à-dire que x est k fois diviseur de zéro.

Si nous multiplions x par r nombres complexes quelconques linéairement indépendants, les produits obtenus ne seront pas linéairement indépendants, puisque nous venons de voir que k de leurs combinaisons linéaires sont nulles; parmi ces produits, $r - k$ seulement seront distincts.

Donc x fait partie d'un sous-système semi-invariant à droite de $r - k$ nombres.

De même, x fera partie d'un sous-système semi-invariant à gauche de $r - k$ nombres. Mais il ne faudrait pas en conclure que x fait partie d'un sous-système invariant de $r - k$ nombres, car ces deux sous-systèmes semi-invariants ne sont pas identiques. Du reste, nous n'envisagerons ici que des sous-systèmes semi-invariants à droite.

Nous pourrons dire qu'un sous-système semi-invariant s de h nombres est *premier* quand il ne contiendra aucun sous-système semi-invariant de moins de h nombres, d'où il suit qu'on peut reproduire *tous* les nombres du sous-système s en multipliant un nombre *quelconque* x de ce sous-système par les divers nombres complexes y du système S. Car s'il n'en était pas ainsi, ceux des nombres de s qu'on obtiendrait en multipliant x par les divers nombres de S, ne reproduisant pas le sous-système s tout entier, formeraient un sous-système semi-invariant de moins de h nombres contenu dans s.

Dans un sous-système semi-invariant premier s, tous les coefficients $x'_{\alpha\beta}$ qui ne sont pas nuls ont même premier indice α (et correspondent par conséquent à un même p^2 ion). Et, en effet, supposons qu'il y ait dans s des nombres où deux coefficients x' dont les premiers indices α et α' soient différents, et qui ne soient pas nuls. Multiplions ces nombres par des nombres complexes

$$y = \sum y_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}.$$

où tous les coefficients y' soient nuls, sauf ceux dont le premier indice est α; dans les produits, les coefficients seront aussi tous nuls, sauf ceux dont le premier indice serait α, et ces produits formeront un sous-système semi-invariant contenu dans s; donc s ne serait pas premier.

Je dis maintenant que, dans le sous-système premier s, il y a, entre les p_α^2 coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$, des relations linéaires distinctes de la forme

$$(1) \qquad \sum A_\beta x'_{\alpha\beta\delta} = 0,$$

où les A_β sont des coefficients constants ne dépendant pas des x' ni du second indice δ, et que ces relations sont au nombre de $p_\alpha - 1$, de sorte que, finalement, le sous-système se compose de p_α nombres distincts.

Et, en effet, soit X un nombre quelconque de notre sous-système premier s; tous les nombres du sous-système pourront être obtenus en multipliant l'un quelconque d'entre eux par d'autres nombres complexes, sans quoi ceux qu'on pourrait obtenir de cette façon formeraient un sous-système semi-invariant contenu dans s.

Considérons les nombres $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$; ils font tous partie de s, ils ne peuvent pas être tous nuls, et, en effet, si l'on pose

$$e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

il vient

$$X = Xe_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} Xe'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Les termes où le premier indice n'est pas égal à α sont déjà tous nuls; si ceux où ce premier indice est α étaient également tous nuls, il faudrait que X fût nul.

Soit donc $Xe'_{\alpha\beta\gamma} \gtrless 0$; le sous-système s pourra être obtenu en multipliant $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$ par un nombre complexe quelconque. On obtient ainsi le sous-système semi-invariant

$$Xe'_{\alpha\beta 1}, \quad Xe'_{\alpha\beta 2}, \quad \ldots, \quad Xe'_{\alpha\beta p},$$

qui se compose de p_α nombres et qui doit être identique à s.

Je dis maintenant que tout système semi-invariant non premier peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes semi-invariants premiers n'ayant aucun nombre en commun et de telle façon que tout nombre du sous-système total puisse, d'une manière et d'une seule, être regardé comme une somme de nombres appartenant aux divers sous-systèmes composants.

Soit en effet X un nombre appartenant à un sous-système semi-invariant s non premier; nous aurons

$$X = \sum C_{\alpha\beta\gamma} X e'_{\alpha\delta\gamma}.$$

Or $X e'_{\alpha\delta\gamma}$ appartient à s et appartient en même temps au sous-système premier formé des nombres $X e'_{\alpha\beta\delta}$ ($\delta = 1, 2, \ldots, p_\alpha$).

Dans ses derniers Mémoires parus dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1899 à 1901 et intitulés *Darstellung der Gruppen durch lineare Transformationen*, M. Frobenius cherche à former les groupes de substitutions linéaires isomorphes à un groupe fini donné. Ce problème pourrait être résolu en s'appuyant sur les principes suivants :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables indépendantes et φ un polynome linéaire et homogène par rapport à ces variables. Soit σ_i une substitution quelconque de G et e_i l'unité complexe correspondante. Soit G' un groupe de substitutions linéaires entre les n variables ξ, isomorphe à G, et σ'_i la substitution de G' correspondant à σ_i; soit φe_i ce que devient le polynome φ par cette substitution.

S'il n'y avait entre les fonctions linéaires φe_i aucune relation linéaire, le groupe G' pourrait être ramené à un groupe de permutations entre les φe_i, et, plus généralement, l'étude du groupe G' peut se ramener à celle des relations linéaires entre les φe_i.

Soit $X = \sum X_i e_i$ un nombre complexe quelconque; nous poserons

$$\varphi X = \sum X_i \varphi e_i,$$

et alors les relations linéaires cherchées seront de la forme

$$\varphi X = 0.$$

Il nous suffira de remarquer que l'ensemble des nombres X qui satisfont à cette relation forme un sous-système semi-invariant à gauche, et que, inversement, étant donné un sous-système semi-invariant à gauche, on peut s'en servir de cette façon pour définir un groupe linéaire G′ isomorphe à G.

§ 6. — Applications du théorème de Frobenius.

Reprenons, comme dans les paragraphes 2 et 3 : 1° notre groupe fini H d'ordre m; 2° nos groupes fuchsiens G et G′ et les fonctions fuchsiennes correspondantes; 3° les intégrales de première espèce $K(z)$ et les intégrales de seconde espèce $P(z, a)$. Conservons les mêmes notations, de telle sorte que σ désigne une substitution de G et S une substitution de G′.

Envisageons d'autre part, comme au paragraphe 5, le système d'unités complexes

$$(1) \qquad e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_m$$

correspondant au groupe H, de sorte qu'à chaque substitution de G corresponde une substitution de H et, par conséquent, une des unités (1). Supposons qu'on ait réduit le système de nombres complexes correspondant, que j'appellerai *le système* $\sum$, à sa forme canonique (en le décomposant en p^2 ions), et soient

$$e'_{\alpha\beta\gamma}$$

les nouvelles unités complexes, le triple indice ayant même signification que plus haut.

Nous emploierons les notations suivantes : soit $F(z)$ une intégrale abélienne quelconque combinaison des $K(z)$ et $P(z, a)$; considérons

$$F(z\sigma_i^{-1}),$$

σ_i étant une substitution de G. A cette substitution correspondra une unité complexe e_i, mais à cette unité correspondront plusieurs substi-

tutions de G que j'appellerai σ_i, σ'_i, etc., et, par conséquent, plusieurs intégrales $F(z\sigma_i^{-1})$, $F(z\sigma_i'^{-1})$, etc.; mais *toutes ces intégrales ne différeront les unes des autres que par des constantes;* car on aura $\sigma'_i = \sigma_i S$, S appartenant à G'. Si donc je conviens de poser

$$F(z\sigma_i^{-1}) = F(z)e_i,$$

la fonction $F(z)e_i$ sera définie *à une constante près.*

Soit maintenant

$$X = \sum X_i e_i = \sum X_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

je conviendrai de poser

$$F(z)X = \sum X_i [F(z)e_i].$$

Nous aurons

$$[F(z)e_i]e_k = [F(z\sigma_i^{-1})]e_k = F(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) = F(z)(e_i e_k),$$

puisque $\sigma_i\sigma_k$ correspond à $e_i e_k$; et plus généralement

$$[F(z)X]Y = F(z)(XY),$$

de sorte que je pourrai écrire simplement $F(z)XY$.

Autre remarque : si $F(z)$ est une intégrale de première espèce, ou se réduit à une fonction algébrique (je veux dire une fonction algébrique de x et de y et, par conséquent, une fonction fuchsienne de z), ou se réduit à une constante, il en sera de même de $F(z)X$.

Si nous rapprochons ces deux remarques, nous verrons que, si l'on considère une fonction $F(z)$ quelconque, l'ensemble des nombres X qui seront tels que la fonction $F(z)X$ jouisse de l'une de ces trois propriétés formeront un sous-système semi-invariant à droite; car il est clair que, si $F(z)X$ jouit d'une de ces propriétés, il en est de même de $F(z)XY$, quel que soit le nombre Y.

Par exemple, nous avons q intégrales de première espèce $K(z)$; supposons

$$q < m$$

et considérons les m intégrales :

$$(2) \qquad K(z\sigma_1), \quad K(z\sigma_2), \quad \ldots, \quad K(z\sigma_m);$$

il y aura entre elles au moins $m - q$ relations linéaires distinctes. Or une combinaison linéaire quelconque des intégrales (2) peut s'écrire d'après notre nouvelle notation

$$K(z)X,$$

X étant un nombre complexe du système $\sum$. Parmi ces combinaisons, il y en aura (pour le moins $m - q$) qui se réduiront à des constantes et les nombres X correspondants formeront un sous-système semi-invariant.

Supposons que, parmi les intégrales (2), il y en ait q' qui soient linéairement indépendantes; le nombre q' sera au plus égal au genre q; d'où $q' \leqq q$.

Quoi qu'il en soit, le sous-système semi-invariant formé par les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$ comprendra précisément $m - q'$ nombres complexes linéairement indépendants.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres X tels que l'on ait *à la fois* [pour toutes les intégrales (2)] :

$$K(z\sigma_1)X = \text{const.}, \quad K(z\sigma_2)X = \text{const.}, \quad \ldots, \quad K(z\sigma_m)X = \text{const.}$$

Cet ensemble formera un sous-système non plus semi-invariant, mais *invariant*, car il est clair qu'on aura

$$K(z)YX = \text{const.}, \qquad K(z)YXZ = \text{const.},$$

Y et Z étant deux nombres complexes quelconques.

Cela posé, nous dirons qu'une intégrale de première espèce $K(z)$ *appartient* à un p^2 ion H si l'on a

$$K(z)X = \text{const.},$$

X étant un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que H, et si la même relation n'a pas lieu pour *tous* les nombres complexes de H.

Il résulte de cette définition que toute intégrale de première espèce peut être regardée comme la somme de plusieurs autres dont chacune *appartient* à un p^2 ion déterminé.

Soit, en effet,

$$K(z) + K(z\sigma_1) = K(z)e_1$$

cette intégrale, nous pouvons écrire :

$$e_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_p,$$

chacun des nombres X_i faisant partie d'un p^2 ion déterminé. Nous aurons alors

$$K(z) = K(z)X_1 + K(z)X_2 + \ldots + K(z)X_p.$$

Alors $K(z)X_i$ ou bien se réduira à une constante ou appartiendra au même p^2 ion que X_i; car on aura évidemment

$$K(z)X_iX_k = \text{const.},$$

si X_k fait partie d'un autre p^2 ion que X_i, puisque alors on aurait $X_iX_k = 0$, et, d'autre part, si X_i et X_k font partie du même p^2 ion, on n'aura pas la même relation, quel que soit X_k, puisqu'il y a un nombre X_k tel que $X_iX_k = X_i$.

Examinons maintenant ce qui se passe, s'il y a des p^2 ions auxquels n'appartient aucune intégrale de première espèce, et il y en aura forcément si $m > q$. Soit X un nombre d'un de ces p^2 ions et $K(z)$ une intégrale quelconque, on aura :

$$(3) \qquad K(z)X = \text{const.}$$

Considérons les périodes de nos intégrales; les périodes de $K(z\sigma_1)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$ et les coefficients entiers de ces combinaisons pourront être déterminés comme nous l'avons vu au paragraphe 3. Celles de $K(z)X$ seront encore des combinaisons linéaires de celles de $K(z)$; mais les coefficients ne seront plus entiers; ces coefficients toutefois seront aisés à déterminer, puisque ce seront à leur tour des combinaisons linéaires

à coefficients entiers des coefficients X_i du nombre complexe

$$X = \sum X_i e_i.$$

Si alors ω est une période de $K(z)$ et si ωX est la période correspondante de $K(z)X$, alors, en vertu de (3), on aura :

$$\omega X = 0. \tag{4}$$

La relation (4) est une relation linéaire entre les périodes de $K(z)$ et, d'après nos hypothèses, ces relations doivent avoir lieu pour toutes les intégrales $K(z)$.

Or nous savons qu'il existe q intégrales admettant chacune $2q$ périodes.

Parmi ces périodes q peuvent être choisies arbitrairement; il y a donc entre les $2q$ périodes q relations qui restent vraies pour toutes les intégrales et il n'y en a que q.

Ces relations sont bien connues. Si $K(z)$ et $K'(z)$ sont deux intégrales quelconques, on sait qu'il y a entre les périodes de ces deux intégrales une relation bilinéaire à coefficients entiers, dite de Riemann, qui s'écrira, par exemple:

$$\omega_1\omega'_1 - \omega_2\omega'_2 + \omega_3\omega'_3 - \omega_4\omega'_4 + \ldots + \omega_{2q-1}\omega'_{2q} - \omega_{2q}\omega'_{2q-1} = 0,$$

si les ω_i sont les périodes normales de $K(z)$ et les ω'_i celles de $K'(z)$.

Si, dans ces relations bilinéaires, on prend pour $K'(z)$ successivement q intégrales de première espèce linéairement indépendantes, on aura, entre les périodes de $K(z)$, q relations linéaires distinctes et qui resteront les mêmes quelle que soit l'intégrale $K(z)$. *Il ne peut y avoir d'autre relation linéaire entre ces périodes.*

Donc, de deux choses l'une : ou bien la relation (4) sera une identité, et alors tous les coefficients de cette relation devront s'annuler, ce qui nous donnera *un certain nombre de relations linéaires à coefficients entiers entre les* X_i $\left(\text{c'est-à-dire entre les coefficients du nombre complexe } X = \sum X_i e_i\right)$, *qui seront vraies pour tous les nombres complexes du* p^2 *ion considéré.*

Ou bien la relation (4) est l'une des relations dont nous venons de parler, que l'on obtient à l'aide d'une intégrale $K(z)$ et dont les coefficients sont des périodes de cette intégrale $K(z)$; et alors *il y aura une intégrale de première espèce dont les périodes seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des* X_i.

Pour savoir lequel de ces deux cas se présentera, je considère l'intégrale de seconde espèce $P(z, a)$ et je forme

$$P(z, a)X.$$

On démontrerait de la même manière : 1° que les nombres X tels que $P(z, a)X$, soit une fonction algébrique, forment un sous-système semi-invariant à droite; 2° que les nombres X tels que tous les $P(z\sigma, a)X$, soient des fonctions algébriques, forment un système invariant; 3° qu'une intégrale de seconde espèce quelconque peut toujours être décomposée en une somme d'une fonction algébrique et de plusieurs intégrales de seconde espèce appartenant chacune à un p^2 ion déterminé.

Il convient, bien entendu, de dire que $P(z, a)$ appartient au p^2 ion H, si $P(z, a)X$ est algébrique quand X est un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que H et si cela n'est plus vrai quand X fait partie de H (ou du moins pour tous les nombres complexes X faisant partie de H).

Soit alors un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de seconde espèce; soit $\varphi(a)$ l'une des périodes de $P(z, a)$ et $\varphi(a)X$ la période correspondante de $P(z, a)X$, on devra avoir

$$(4\ bis) \qquad \varphi(a)X = 0,$$

X étant un nombre quelconque du p^2 ion envisagé et quelle que soit l'intégrale $P(z, a)$.

La relation (4 *bis*) est une relation linéaire entre les périodes de $P(z, a)$ formée avec ces périodes comme la relation (4) l'était avec celles de $K(z)$. Mais ces périodes d'une intégrale de deuxième espèce peuvent être choisies arbitrairement.

Donc la relation (4 *bis*) est une identité, et il en est de même de la relation (4).

On est donc dans le premier cas et il y a entre les X_i des relations linéaires à coefficients entiers.

Soit maintenant un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de première espèce et auquel appartienne pourtant une intégrale de deuxième espèce. Alors la relation (4) ne pourra être une identité, sans quoi il en serait de même de (4 *bis*) et $P(z, a)X$ serait algébrique quelle que soit $P(z, a)$, contrairement à l'hypothèse.

On est donc dans le second cas et il y a une intégrale de première espèce dont les périodes sont des combinaisons à coefficients entiers des X_i.

Nous devons donc distinguer trois sortes de p^2 ions :

Première sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *sont des fonctions algébriques.*

Deuxième sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *ne sont pas des fonctions algébriques, mais tous les* $K(z)X$ *sont des constantes.*

Troisième sorte : *Tous les* $K(z)X$ *ne sont pas des constantes.*

Plaçons-nous à un autre point de vue. Considérons les unités complexes (1) $e_1, e_2, \ldots, e_m$: elles seront liées aux unités complexes nouvelles $e'_{\alpha\beta\gamma}$ par des relations linéaires à coefficients constants. On aura, par exemple,

$$e'_{\alpha\beta\gamma} = \sum A_i e_i,$$

et les coefficients A_i seront des nombres *algébriques*. Supposons que pour l'un des p^2 ions, que j'appellerai le p^2 ion Π_α, les coefficients A_i qui entrent dans les expressions des unités $e'_{\alpha\beta\gamma}$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers d'une certaine racine ζ d'une équation algébrique L à coefficients entiers.

Plus généralement, supposons que le p^2 ion Π_α puisse être engendré par p^2 unités fondamentales e'', qui pourront être différentes des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$, et que l'on ait

$$e'' = \sum A_i e_i,$$

les A_i étant des fonctions rationnelles de ζ.

Il suffit pour cela que le nombre commutable qui fait partie de Π_α ait ses coefficients rationnels en ζ. En effet, on obtiendra les nombres de Π_α en multipliant ce nombre commutable par un nombre complexe quelconque. Si nous multiplions ce nombre commutable par des nombres complexes entiers, les produits auront leurs coefficients rationnels en ζ et l'on pourra choisir les p^2 unités fondamentales parmi les produits ainsi obtenus.

Soient ζ', ζ'', ... les autres racines de cette équation L. Soit B_i ce que devient A_i quand on y remplace ζ par ζ'; il existera un autre p^2 ion $\Pi_{\zeta'}$ dont les unités fondamentales seront

$$\sum B_i e_i.$$

Les p^2 ions Π_α, $\Pi_{\zeta'}$ et ceux qu'on formerait avec ζ'', ..., comme on a formé $\Pi_{\zeta'}$ avec ζ', seront dits *conjugués*.

Il peut arriver, il est vrai, que Π_α, $\Pi_{\zeta'}$ et tous les p^2 ions conjugués se confondent en un seul et c'est ce qui arrive en particulier avec les quaternions ordinaires de Hamilton, si l'on veut faire dériver ces quaternions des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$; mais si l'on ne s'astreint pas à choisir ces unités canoniques comme unités fondamentales, on peut toujours supposer que tous les conjugués de Π_α sont distincts. Il suffit pour cela de prendre pour unités fondamentales p^2 produits du nombre commutable par des nombres complexes entiers.

Je dis que si un p^2 ion est de la première sorte, il en sera de même de tous ses conjugués.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que Π_α soit de la première sorte, c'est que la relation (4), pour tous les nombres de ce p^2 ion, se réduise à une identité, c'est-à-dire que l'on ait *identiquement*, pour toutes les unités fondamentales de Π_α,

$$\omega e' = 0,$$

quelle que soit la période ω choisie, c'est-à-dire enfin que l'on ait, pour toutes ces unités fondamentales, certaines relations

$$\sum m_i A_i = 0,$$

dont les coefficients m_i sont des entiers faciles à déterminer.

Mais, comme ces coefficients sont entiers, les relations devront subsister quand on y remplacera ζ par ζ'; on aura donc encore

$$\sum m_i B_i = 0,$$

de sorte que Π_δ sera encore de la première sorte.

Remarquons maintenant que le nombre des intégrales de première espèce appartenant à un p^2 ion (d'ordre p) est toujours un multiple de p. Et, en effet, partons d'une intégrale $K(z)$ quelconque et formons les diverses intégrales $K(z)X$, où X est un nombre complexe du p^2 ion considéré; il y en aura p^2, puisqu'il y a p^2 nombres X dans le p^2 ion, mais elles ne seront pas toutes distinctes; il peut y avoir en effet des relations de la forme

$$(5) \qquad K(z)X = \text{const.}$$

Nous savons que les nombres X jouissant de cette propriété forment un sous-système semi-invariant à droite et il en est de même des nombres X jouissant de cette propriété et faisant partie de notre p^2 ion.

Or, les sous-systèmes semi-invariants faisant partie de ce p^2 ion peuvent être décomposés en un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants *premiers* contenant chacun p nombres. Le nombre des relations (5) distinctes sera donc un multiple de p et il en sera de même par conséquent du nombre des intégrales $K(z)X$ *distinctes*.

Nous pouvons dire que les intégrales $K(z)$ *dérivent* de l'intégrale $K(z)$, où X est un nombre quelconque du p^2 ion.

Il en résultera que le nombre des intégrales distinctes qui dérivent d'une même intégrale et qui appartiennent à un même p^2 ion est un multiple de p.

Nous dirons qu'un système d'intégrales est *fermé*, si elles appartiennent à un même p^2 ion et si toutes les intégrales qui dérivent d'une intégrale du système font également partie du système. Nous dirons qu'un système fermé est *premier* s'il ne contient aucun système fermé plus petit.

Je dis alors qu'un système fermé premier quelconque se compose de

p intégrales. Je n'ai qu'à répéter les raisonnements que j'ai faits au paragraphe 5 à propos des sous-systèmes semi-invariants premiers. Le système étant premier, toute intégrale du système pourra être regardée comme dérivant de l'une quelconque d'entre elles $K(z)$, ou encore de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ [à moins que $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ ne se réduise à une constante]; mais cela ne peut pas être vrai de tous les $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$, sans quoi

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}$$

se réduirait à une constante. Mais les intégrales dérivant de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ sont les intégrales

$$K(z)e'_{\alpha\beta\delta} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, p),$$

et elles sont au nombre de p. C. Q. F. D.

Je dis maintenant qu'un système fermé quelconque peut être décomposé en systèmes premiers. Car si $K(z)$ est une intégrale quelconque du système, on peut écrire

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

D'ailleurs nous pouvons toujours supposer que ces systèmes premiers sont distincts, c'est-à-dire qu'il n'y a entre les intégrales de ces systèmes premiers aucune relation linéaire, sans quoi on se servirait de ces relations linéaires pour éliminer les systèmes premiers qui ne seraient pas distincts des autres.

On en conclut aisément que le nombre des intégrales d'un système fermé quelconque et, en particulier, le nombre total des intégrales distinctes appartenant à un p^2 ion est toujours un multiple de p.

Examinons maintenant les relations entre les périodes. Soit

$$K(zS\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega e_i,$$

S appartenant à G' et

$$\omega X = \sum X_i(\omega e_i)$$

si $X = \sum X_i e_i$. Quels sont les nombres complexes X pour lesquels on a

$$\omega X = 0?$$

1° Je suppose d'abord que ωX reste nul *quelle que soit l'intégrale* K pour une substitution S donnée de G'; on aura

$$\omega' e_i = K'(zS\sigma_i^{-1}) - K'(z\sigma_i^{-1}),$$

et, si l'on prend $K'(z) = K(z\sigma_k^{-1})$,

$$\omega' e_i = K(zS\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) = \omega e_k e_i,$$

$$\omega' X = \sum X_i(\omega e_k e_i) = \omega e_k X.$$

Comme on doit avoir $\omega' X = 0$, on aura

$$\omega e_k X = 0,$$

et, par conséquent,

$$\omega Y X = 0,$$

quel que soit le nombre complexe Y.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à gauche.*

2° Je suppose que ωX reste nul pour une intégrale K donnée *pour toutes les substitutions* S de G'.

Alors

$$\omega X e_k = \sum X_i \omega e_i e_k = \sum X_i [K(zS\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})].$$

Mais, G' étant un sous-groupe invariant, on a

$$S\sigma_k^{-1} = \sigma_k^{-1} S',$$

S' appartenant à G', d'où

$$\omega X e_k = \sum X_i [K(z\sigma_k^{-1} S'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})]$$

$$= \sum X_i [K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1})].$$

Or nous pouvons poser

$$K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega' e_i,$$

ω' étant une période telle que, d'après notre hypothèse, $\omega' X$ soit nul; on aura donc :

$$\omega X e_k = \sum X_i(\omega' e_i) = \omega' X = 0.$$

Donc ωe_k et ωXY seront nuls, Y étant un nombre complexe quelconque.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à droite.*

Les nombres X pour lesquels $\omega X = 0$ pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour toutes les substitutions S formeront évidemment un système invariant; ce système nous est déjà connu, puisqu'il est formé de tous les p^2 ions de la première sorte.

Nous avons vu au paragraphe 3 qu'au groupe H se rattachent deux groupes linéaires remarquables; étudions ces deux groupes de la façon que nous avons expliquée à la fin du paragraphe 5 et d'abord le groupe à coefficients entiers que subissent les périodes.

Il s'agit de rechercher les relations de la forme $\omega X = 0$, qui sont vraies pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour une substitution S donnée; d'après ce que nous venons de voir, les nombres X formeront un sous-système semi-invariant à gauche, comprenant d'abord tous les p^2 ions de la première sorte et comprenant encore d'autres nombres complexes.

De plus, on peut supposer, vu la nature du groupe, que tous les nombres X sont entiers.

Convenons donc de dire qu'un ensemble de nombres complexes entiers forme un *sous-système entier semi-invariant à gauche* quand tout nombre du sous-système multiplié à gauche par un nombre *entier* quelconque du système total fait encore partie du sous-système. Alors les nombres X formeront un sous-système *entier* semi-invariant à gauche.

Il est clair que, si l'on considère un p^2 ion et tous ses conjugués,

leur ensemble formera un sous-système invariant, et que les nombres entiers de ce sous-système formeront un *sous-système invariant entier*. Les sous-systèmes invariants entiers formés de cette façon avec les p^2 ions de la première sorte feront évidemment partie du sous-système des nombres X, mais ce sous-système comprend encore d'autres nombres complexes.

Ce sous-système des nombres X peut être décomposé en *sous-systèmes semi-invariants entiers premiers*, si j'appelle ainsi les sous-systèmes semi-invariants entiers qui n'en contiennent pas d'autre plus restreint.

Comment peut-on former les sous-systèmes semi-invariants entiers premiers? Considérons un sous-système semi-invariant premier *non entier*; soit Σ ce sous-système, il appartiendra à un certain p^2 ion Π et se composera de p nombres distincts (si p est l'ordre de Π).

Soient Σ', Σ'', ... les sous-systèmes *conjugués* de Σ (au sens arithmétique donné plus haut à ce mot). L'ensemble des systèmes Σ, Σ', Σ'', ... formera un nouveau sous-système semi-invariant qui (à l'inverse de ce qui arrive pour chacun des systèmes partiels Σ, Σ', ...) contiendra des nombres entiers. Les nombres entiers de ce système formeront un sous-système semi-invariant entier que j'appelle Σ_1.

Voici comment on peut former les nombres de ce sous-système. Soit X un nombre de Σ, dont les coefficients X_i seront les fonctions rationnelles de la quantité algébrique ζ envisagée plus haut; soient X', X'', ... les nombres conjugués de X, où ζ est remplacé par ζ', ζ'', ... Soit ensuite R une fonction rationnelle quelconque de ζ; soient R', R'', ... les fonctions correspondantes de ζ', ζ'', ... Le nombre complexe

$$(X) = XR + X'R' + X''R'' + \ldots$$

sera rationnel et, en le multipliant par un entier ordinaire convenable, on obtiendra un nombre entier complexe. On obtiendra de la sorte tous les nombres du sous-système Σ_1.

Maintenant, ce sous-système entier est-il premier? Il me suffit, pour le décider, de chercher si, en multipliant à gauche un nombre entier *quelconque* du sous-système par un nombre complexe convenable, on peut retrouver un nombre entier *quelconque* du sous-système.

Nous pouvons toujours supposer que tous les p^2 ions conjugués de H sont distincts.

Dans ce cas, tous les nombres X, X′, X″, ... appartiennent à des p^2 ions distincts. Soient alors Y et Z deux nombres appartenant au même sous-système que X; soient S et U deux fonctions rationnelles de ζ; soient Y′, Y″, ..., Z′, Z″, ..., S′, S″, ..., U′, U″, ... leurs conjugués. Les nombres Y et X′ appartenant à des p^2 ions différents, les produits tels que YX′ seront nuls.

Cela posé, considérons les nombres complexes

$$(Y) = YS + Y'S' + Y''S'' + \ldots,$$
$$(Z) = ZU + Z'U' + Z''U'' + \ldots.$$

On aura alors :

$$(YX) = YXRS + Y'X'R'S' + Y''X''R''S'' + \ldots.$$

Or, le sous-système semi-invariant dont fait partie X étant premier, on peut choisir Y de façon que YX ou YXRS soit égal à un nombre quelconque du sous-système; nous supposerons donc

$$YXRS = U,$$

d'où, en changeant ζ en ζ', ζ'', ...,

$$Y'X'R'S' = Z'U', \qquad Y''X''R''S'' = Z''U'', \qquad \ldots.$$

et enfin

$$(Z) = (Y)(X).$$

Or (Z) et (X) sont deux nombres *quelconques* du système Σ_1; on peut néanmoins trouver un nombre (Y) qui, multiplié par (X), reproduise (Z). Donc notre sous-système est premier. C. Q. F. D.

Ces considérations suffisent pour nous faire comprendre l'origine et la nature du groupe linéaire à coefficients entiers dont il s'agit.

Passons à l'autre groupe : quand on change z en $z\sigma_1$, les intégrales de première espèce $K(z)$ subissent une substitution linéaire; nous

avons posé

$$K(z\sigma_i^{-1}) = K(z)e_i, \qquad K(z)X = \sum X_i K(z)e_i.$$

L'étude du groupe en question revient à chercher les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$; nous avons vu que ces nombres forment un sous-système semi-invariant à droite; ce sous-système comprend d'abord tous les p^2 ions de première et de deuxième sorte, puis un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants premiers contenus dans les p^2 ions de la troisième sorte.

On s'étonnera peut-être que ce sous-système soit semi-invariant à droite, puisque nous avons vu à la fin du paragraphe 5 que les nombres complexes X qui servent à la définition d'un groupe doivent former un sous-système semi-invariant à gauche.

Il est aisé de voir d'où vient la différence. Supposons qu'on ait posé

$$K(z\sigma_i) = (K)e_i, \qquad (K)Y = \sum Y_i(K)e_i.$$

Nous nous serions retrouvés dans les mêmes conditions qu'à la fin du paragraphe 5, et les nombres Y auraient dû former un sous-système semi-invariant à gauche. C'est, en effet, ce qui arrive. Nous avons

$$(K)Y = \sum Y_i K(z\sigma_i), \qquad K(z)X = \sum X_i K(z\sigma_i^{-1}).$$

On aura donc $(K)Y = K(z)X$ si

$$Y = \sum X_i e_i^{-1}.$$

Soit maintenant :

$$X' = Xe_k = \sum X'_i e_i, \qquad Y' = \sum X'_i e_i^{-1};$$

il est aisé de voir que $Y' = e_k Y$, ce qui prouve que si les X forment un sous-système semi-invariant à droite, les Y formeront un sous-système semi-invariant à gauche.

A la fin du paragraphe 3, nous avons été amenés à considérer certains nombres que nous avons appelés b_i et avec lesquels nous avons formé un déterminant de groupe. Ces nombres devaient être choisis de telle façon que ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs jusqu'à un certain ordre. Nous avons distingué ensuite deux cas suivant que les sommes $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1})$ se réduisaient ou non à des constantes quelle que soit l'intégrale K choisie.

Je dis maintenant que les deux cas peuvent se présenter. Et, en effet, pour que notre déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des premiers ordres, il suffit, par exemple, que le nombre $\sum b_i e_i$ appartienne à un p^2 ion. Alors le premier cas se présentera si ce p^2 ion est de la première ou de la deuxième sorte, et le second cas si le p^2 ion est de la troisième sorte.

§ 7. — Application à l'exemple du paragraphe 4.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4, où le groupe H se composait de 168 substitutions. Ces 168 substitutions se répartissent en six classes (en groupant dans la même classe la substitution σ_i et ses transformées $\sigma_k^{-1}\sigma_i\sigma_k$); je désignerai ces six classes par les lettres E, P, Q, R, S, S_2 :

La classe	E	comprendra	1	substitution de période	1	(substitution identique σ_1)
»	P	»	24	»	7	
»	Q	»	24	»	7	
»	R	»	56	»	3	
»	S	»	42	»	4	
»	S_2	»	21	»	2	
			168			

Désignons alors par les lettres

$$E = e_1, \quad P, \quad Q, \quad R, \quad S, \quad S_2$$

les nombres complexes obtenus en faisant la somme des unités com-

plexes correspondant aux diverses substitutions de la classe désignée par la même lettre. Ces six nombres seront commutables.

D'après M. Frobenius [*loco citato* (*Die Gruppencharactere*), *in fine*], le système des nombres complexes se décompose en six p^2 ions; chacun de ces p^2 ions contient un nombre commutable et un seul, et ce nombre suffit pour le caractériser, puisque tous les autres nombres du p^2 ion s'obtiennent en le multipliant par un nombre complexe quelconque. Nous avons donc six nombres commutables remarquables que j'appellerai

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= E + P + Q + R + S + S_2,\\
\alpha_2 &= 7E + R - S - S_2,\\
\alpha_3 &= 3E + TP + T'Q + S - S_2,\\
\alpha_4 &= 3E + T'P + TQ + S - S_2,\\
\alpha_5 &= 8E + P + Q - R,\\
\alpha_6 &= 6E - P - Q + 2S_2.
\end{aligned}$$

On a, comme au paragraphe 4,

$$2T = -1 + \sqrt{-7}, \qquad 2T' = -1 - \sqrt{-7}.$$

Je désignerai les six p^2 ions par les mêmes lettres que les nombres commutables correspondants et je trouverai que :

Pour α_1,

$$p = 1, \qquad p^2 = 1;$$

Pour α_2,

$$p = 7, \qquad p^2 = 49;$$

Pour α_3,

$$p = 3, \qquad p^2 = 9;$$

Pour α_4,

$$p = 3, \qquad p^2 = 9;$$

Pour α_5,

$$p = 8, \qquad p^2 = 64;$$

Pour α_6,

$$p = 6, \qquad p^2 = 36;$$

$$168.$$

On voit que les nombres commutables α_1, α_2, α_5, α_6 sont rationnels, que les nombres α_3 et α_4 contiennent l'irrationalité $\sqrt{-7}$ et sont conjugués. Il en est donc de même des p^2 ions correspondants.

Nous savons qu'il y a trois intégrales abéliennes de première espèce et six intégrales de première et de deuxième espèces distinctes (c'est-à-dire telles qu'aucune de leurs combinaisons linéaires n'est algébrique).

Je vois d'abord que le p^2 ion α_1 est de première sorte, car il ne contient qu'un nombre α_1 qui est la somme de toutes les unités complexes, de sorte qu'on aura

$$\alpha_1 = \sum e_i, \qquad P(z, a)\alpha_1 = P(z\sigma_i^{-1}, a);$$

si donc

$$P(z, a) = \int Q(x, y)\,dx,$$

on aura, en appelant y_1, y_2, ..., y_m les diverses déterminations de y,

$$P(z, a)\alpha_1 = \sum \int Q(x, y_i)\,dx = \int R(x)\,dx,$$

R étant rationnel en x, de sorte que $P(z, a)\alpha_1$ sera algébrique.

C. Q. F. D.

Je dis que les p^2 ions α_2, α_5, α_6 ne peuvent être de la troisième sorte, sans quoi le nombre des intégrales de première espèce serait, pour α_2, un multiple de 7, pour α_5 un multiple de 8, pour α_6 un multiple de 6, ce qui est impossible, puisque le nombre total des intégrales de première espèce n'est que de trois.

Comme il faut qu'il y ait au moins un p^2 ion de la troisième sorte, ce ne pourra être que α_3 ou α_4; ils ne pourront l'être tous les deux, sans quoi il y aurait au moins trois intégrales appartenant à α_3, au moins trois à α_4, en tout au moins six et il n'y en a que trois.

L'un des deux p^2 ions est donc de troisième sorte; l'autre ne peut être de la première sorte, car si un p^2 ion est de la première sorte, il en est de même de tous ses conjugués; il sera donc de la deuxième sorte.

Le nombre des intégrales de première et de deuxième espèces qui appartiennent à α_3 est un multiple de trois; de même pour celles qui appartiennent à α_4. Le nombre de ces intégrales qui appartiennent à α_2 et à α_1 est donc au moins six et, comme le nombre total est six, il faut conclure que tous les autres p^2 ions sont de la première sorte.

En résumé, sur nos six p^2 ions, quatre sont de la première sorte, un de la deuxième et un de la troisième.

§ 8. — Remarques diverses.

Étant donné un groupe fini H, on peut, *d'une infinité de manières*, former les groupes fuchsiens G et G'. On engendrerait donc d'une infinité de manières les systèmes correspondants de fonctions fuchsiennes ou d'intégrales abéliennes.

La comparaison de ces différentes manières et de ces différents systèmes serait sans doute très intéressante.

Je me bornerai à la remarque suivante : on peut se demander à quoi correspondent les groupes linéaires à coefficients entiers que nous avons rencontrés; il suffit de se reporter à leur origine expliquée au paragraphe 3.

Soient G un groupe auquel H soit mériédriquement isomorphe, et G' le sous-groupe invariant de G auquel correspond dans H la substitution identique; soient s_i une substitution de H et σ_i la substitution correspondante de G.

Supposons maintenant que G' dérive de q substitutions fondamentales

$$S, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_q,$$

et soit S une combinaison quelconque de ces substitutions fondamentales. Alors

$$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$$

sera aussi une combinaison de ces substitutions fondamentales.

Soit maintenant G'' un groupe mériédriquement isomorphe à G', défini comme il suit; il admettra toutes les relations de structure de G', mais de plus toutes ses substitutions seront permutables. Si donc T est

la substitution de G'' qui correspond à S et T' celle qui correspond à S', la substitution de G'' qui correspondra à SS' sera identique à celle qui correspondra à $S'S$, de sorte qu'on aura

$$TT' = T\,T.$$

Il pourrait arriver que le groupe G'' ainsi défini se réduisît à la substitution identique, mais cela n'arrivera pas si G' est un groupe fuchsien de genre > 0.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_q$ les substitutions de G'' qui correspondent à $S_1, S_2, \ldots, S_q$; à S correspondra dans G'' une substitution

$$T = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_q^{\alpha_q},$$

où α_i est la somme des exposants de S_i dans la combinaison S; à $S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$ correspondra

$$T' = T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \ldots T_q^{\beta_q},$$

où β_i est la somme des exposants de S_i dans la combinaison S'.

Il est aisé de voir que les β sont des combinaisons linéaires des α. A chaque substitution s_i de H correspondra donc une transformation linéaire à coefficients entiers dont l'ensemble formera un groupe isomorphe à H. Voilà la signification de ces groupes linéaires à coefficients entiers.

Faisons en passant une autre remarque: tout groupe fini contenu dans le groupe linéaire conserve une forme quadratique définie positive, ou bien une forme à indéterminées conjuguées.

Supposons en effet d'abord que le groupe soit réel, c'est-à-dire que toutes les substitutions du groupe aient leurs coefficients réels. Soient X_1 une forme linéaire quelconque de nos n variables, $X_2, X_3, \ldots, X_h$ ses transformées; alors le groupe conservera la forme quadratique définie positive

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2,$$

qui ne peut être identiquement nulle.

Supposons que le groupe ne soit pas réel; soient G ce groupe, x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ nos variables indépendantes; soit alors G_0 un groupe imaginaire conjugué du précédent portant sur les variables $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ imaginaires conjuguées des x.

Soit alors X_1 une forme linéaire quelconque des x; soient X_2, $X_3, \ldots, X_h$ ses transformées par le groupe G; soit X_1^0 une forme linéaire des x_0, imaginaire conjuguée de X_1; soient $X_2^0, \ldots, X_h^0$ ses transformées par les substitutions correspondantes de G_0. Alors la forme à indéterminées conjuguées

$$F = X_1 X_1^0 + X_2 X_2^0 + \ldots + X_h X_h^0$$

sera invariante.

Soient y_i et z_i les parties réelle et imaginaire de x_i; alors G pourra être regardé comme un groupe réel portant sur les $2n$ variables y et z, et F sera une forme quadratique définie de ces $2n$ variables, de sorte qu'on est ramené au cas précédent.

Cette remarque bien simple pourrait peut-être simplifier l'application du théorème de M. Jordan; elle ramène en effet la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire à l'étude géométrique de la division régulière d'une sphère à plus de trois dimensions.

Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor;

PAR M. ERNST LINDELOF.

---

1. Soit $\varphi(z, \alpha)$ une fonction analytique de la variable complexe $z = \rho e^{i\psi}$, dépendant d'un paramètre réel et *positif* α et vérifiant les conditions suivantes :

1° Elle est holomorphe pour $-\psi_0 < \psi < \psi_0$, quel que soit ρ, et pour $\rho < 1$, quel que soit ψ, ψ_0, ψ_0 étant des angles positifs compris entre o et π;

2° On a $|\varphi(z, \alpha)| < e^{K(\alpha)\rho}$ pour $-\psi_0 < \psi < \psi_0$, $K(\alpha)$ tendant vers zéro en même temps que α;

3° α tendant vers zéro, $\varphi(z, \alpha)$ tend uniformément vers l'unité dans toute portion finie du domaine où est supposée vérifiée l'hypothèse 1°;

4° $\lim_{n=\infty} \varphi(n, \alpha)^{\frac{1}{n}} = 0$.

De ces hypothèses on peut conclure immédiatement que la série

$$(1) \qquad \sum_{0}^{\infty} \varphi(n, \alpha) x^n$$

représente une fonction entière de la variable x, et que cette fonction

tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans toute aire intérieure au cercle $|x| = 1$, lorsque α décroît vers zéro.

2. Pour pousser plus loin l'étude de la fonction (1), nous ferons usage de la théorie des résidus de Cauchy. Dans le plan de la variable z, menons des rayons vecteurs l et l' dont les arguments soient respectivement égaux à ψ_0 et à $-\psi_0'$, et traçons de l'origine comme centre un cercle C de rayon $c + \frac{1}{2}$, et un cercle c d'un rayon inférieur à l'unité. Nous marquerons respectivement par A et a, A′ et a' les points d'intersection des rayons l et l' avec les cercles C et c, et nous désignerons par L′ le contour fermé composé du segment Aa du rayon l, de l'arc aa' du cercle c qui rencontre l'axe réel *négatif*, du segment a'A′ du rayon l', et de l'arc A′A du cercle C qui passe par le point $z = c + \frac{1}{2}$.

Ceci posé, le célèbre théorème de Cauchy nous permet d'écrire [1]

$$(2) \qquad \sum_0^c \varphi(n, \alpha) x^n = \int_{L'} \frac{e^{-\pi i z}}{2 i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour L′ dans le sens direct.

En faisant $x = re^{i\psi}$, on aura sur l'arc A′A de la circonférence C

$$\left| \frac{e^{-\pi i z}}{2 i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \right| < e^{-\left(c+\frac{1}{2}\right)\pi \sin\psi + \log r \cos\psi - k\alpha} \left| 1 + \varepsilon(c) \right|,$$

$\varepsilon(c)$ tendant vers zéro lorsque c croît indéfiniment. Soient s la plus petite des quantités $\frac{\pi}{2} \sin\psi_0$ et $\frac{\pi}{2} \sin\psi_0'$, t la plus petite des quantités $\frac{\pi}{2} |\operatorname{tang}\psi_0|$ et $\frac{\pi}{2} |\operatorname{tang}\psi_0'|$, et Δ le segment de l'arc réel négatif compris

---

[1] Des intégrales définies du genre de celles que nous envisageons dans cette étude, et que nous avions envisagées dans la Note insérée dans les *Comptes rendus* du 29 décembre 1902, ont fait l'objet de recherches étendues de M. Mellin (*voir*, par exemple, *Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. XX, et *Acta mathematica*, t. XXV).

entre les points $x = -e^{-\frac{l}{2}}$ et $x = -e^{-\frac{l'}{2}}$. Si l'on suppose le point z situé sur le segment Δ et le paramètre α inférieur à un certain nombre positif α_0, déterminé de telle sorte qu'on ait $K(\alpha) < \frac{s}{4}$ pour $\alpha < \alpha_0$, la quantité $[\pi|\sin\psi| - \log r\cos\psi - K(\alpha)]$ sera supérieure à $\frac{s}{4}$ pour tout point z situé sur l'arc $A'A$ de la circonférence C. La partie correspondante de l'intégrale figurant au second membre de (2) tendra donc vers zéro, lorsqu'on fait croître c indéfiniment, de sorte que, sous les conditions énoncées, on pourra de l'égalité (2) tirer la formule suivante :

$$(3) \qquad \sum_0^\infty \varphi(n, \alpha) x^n = \int_L \frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \, dz,$$

le contour d'intégration L étant composé de l'arc aa' du cercle c et des segments des rayons l et l' qui sont extérieurs à ce cercle.

5. On a sur le rayon l, en écrivant $x = re^{i\omega}$,

$$\left|\frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z\right| < e^{\rho \log r \cos\psi_0 - \omega \sin\psi_0 + k\alpha} [1 + \varepsilon(\rho)],$$

et sur le rayon l'

$$\left|\frac{e^{-\pi i z}}{2i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z\right| < e^{\rho \log r \cos\psi_0 + (\omega - 2\pi) \sin\psi_0 + k\alpha} [1 + \varepsilon'(\rho)],$$

les quantités $\varepsilon(\rho)$ et $\varepsilon'(\rho)$ tendant vers zéro lorsque ρ tend vers l'infini.

Désignons par S' le domaine du plan des x défini par les inégalités

$$(4) \qquad \begin{cases} \log r \cos\psi_0 - \omega \sin\psi_0 < 0, \\ \log r \cos\psi_0 + (\omega - 2\pi) \sin\psi_0 < 0, \end{cases}$$

et choisissons dans son intérieur une aire finie et connexe quelconque T renfermant le segment Δ de l'axe réel (lequel est bien intérieur au domaine S', comme on le voit de suite en se reportant au

n° **2**). On pourra trouver deux nombres positifs, $\alpha_0 (< \alpha_0)$ et η, tels que l'inégalité

$$(5) \qquad \left| \frac{e^{-\pi i z}}{2 i \sin \pi z} \varphi(z, \alpha) x^z \right| < e^{-\eta \rho}$$

soit vérifiée sur les rayons l et l' à partir d'une certaine valeur de ρ, et cela pour tout point x du domaine T et pour toute valeur α inférieure à α_0.

On en conclut que le second membre de l'égalité (3) représente, pour $\alpha < \alpha_0$, une fonction holomorphe de x dans tout le domaine T. Comme il en est de même du premier membre, puisque c'est une fonction entière de x, et comme l'égalité en question, d'après le n° **2**, est vérifiée sur le segment Δ de l'axe réel qui est intérieur à T, le principe fondamental du prolongement analytique nous permet donc d'affirmer que *l'égalité* (3) *subsiste dans tout le domaine* T, *dès que* $\alpha < \alpha_0$.

4. Les conclusions des deux derniers numéros restant toutes valables lorsqu'on remplace la fonction $\varphi(z, \alpha)$ par l'unité, il s'ensuit que l'égalité

$$(6) \qquad \frac{1}{1-x} = \int_L \frac{e^{-\pi i z}}{2 i \sin \pi z} x^z \, dz$$

subsiste également dans tout le domaine T. Or, en vertu de l'hypothèse 3° et de l'inégalité (5), laquelle est vérifiée encore pour

$$\varphi(z, \alpha) = 1,$$

la différence entre les seconds membres des égalités (3) et (6) tend uniformément vers zéro dans le domaine T, lorsque α décroît vers zéro. Par suite, il en sera de même de la différence

$$\sum_0^\infty \varphi(n, \alpha) x^n - \frac{1}{1-x},$$

et puisque celle-ci, comme nous l'avons déjà dit, tend encore vers zéro

dans toute aire intérieure au cercle $|x| = 1$, nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Le paramètre α tendant vers zéro, la fonction entière (1) tend uniformément vers $\frac{1}{1-x}$ dans toute aire finie intérieure au domaine S, lieu des points x qui font partie soit du domaine S, soit du cercle $|x| < 1$.

On voit facilement que S est un domaine d'un seul tenant dont le contour est formé par les arcs des spirales logarithmiques

$$r = e^{\cot\alpha\,\theta} \qquad \text{et} \qquad r = e^{-\cot\alpha\,\theta},$$

compris entre le point $x = 1$ et le premier point où ces spirales se coupent en dehors du cercle $|x| = 1$.

5. Étant donnée une série de Taylor quelconque

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \tag{7}$$

ayant un rayon de convergence fini et non nul, construisons un domaine S_f d'après le principe suivant :

Soit $\overline{S}$ le domaine obtenu en transformant la partie du plan qui est extérieure à S par une inversion ayant l'origine pour centre, et soit $(x\overline{S})$ le domaine qu'on déduit de $\overline{S}$ en multipliant géométriquement par x; S_f sera, par définition, l'ensemble des points x tels que $f(x)$ soit holomorphe à l'intérieur du domaine $(x\overline{S})$.

Cela posé, une application très intéressante de l'intégrale de Cauchy, qui a été indiquée par M. Borel [1], nous permet de tirer du résultat du n° 4 le théorème suivant :

Lorsque α tend vers zéro, la fonction entière $\sum_0^\infty a_n \zeta(n, \alpha) x^n$ tend

---

[1] *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 63-64 et 133-134.

uniformément vers la fonction donnée $f(x)$ dans toute aire finie intérieure au domaine S_f.

Ce résultat s'applique encore si les hypothèses du n° 1 sont vérifiées, non pas pour $\varphi(z, \alpha)$, mais pour $\varphi(z + n_0, \alpha)$, n_0 étant un entier positif quelconque, sauf à remplacer, s'il est nécessaire, le facteur $\varphi(n, \alpha)$ par l'unité dans certains des n_0 premiers termes de la fonction entière en question.

6. On peut donner une autre forme au résultat qui précède. En effet, $\varepsilon(\alpha)$ étant une fonction positive quelconque qui tend vers zéro en même temps que α, il suit de l'hypothèse 4° du n° 1 qu'on peut trouver, pour toute valeur de α, un entier positif ν_α tel qu'on ait

$$(8) \qquad |\varphi(n, \alpha)|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon(\alpha) \quad \text{pour } n > \nu_\alpha.$$

Considérons alors la somme

$$\sum_{\nu_\alpha + 1}^{\infty} a_n \varphi(n, \alpha) x^n,$$

en supposant $|x| \leqq r$, r étant aussi grand qu'on voudra. Puisque la série (7) admet un rayon de convergence différent de zéro, on a, pour toute valeur de n, $|a_n| < k^n$, k étant une quantité finie. Pour $n > \nu_\alpha$ on aura donc, d'après l'inégalité (8), $|a_n \varphi(n, \alpha) x^n| < [kr\varepsilon(\alpha)]^n$. Or la quantité $kr\varepsilon(\alpha)$ tend vers zéro en même temps que α, de sorte qu'elle sera, par exemple, $< \frac{1}{2}$ lorsque α sera inférieur à une certaine limite. La somme en question étant alors inférieure à $\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_\alpha}$, on voit qu'elle tend uniformément vers zéro dans le cercle $|x| \leqq r$, et cela quelque grand que soit r. En rapprochant ce résultat du théorème du n° 5, nous arrivons donc à la conclusion suivante :

α tendant vers zéro, le polynome $\sum_0^{\nu_\alpha} a_n \varphi(n, \alpha) x^n$ tendra uniformément vers $f(x)$ dans toute aire finie intérieure au domaine S_f,

si, pour toute valeur de α, *on détermine l'entier* ν_α *conformément à la condition* (8).

Les deux expressions analytiques que nous avons obtenues pour la fonction $f(x)$, à savoir l'expression limite double

$$(9) \qquad f(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_0^\infty a_n \zeta(n, \alpha) x^n,$$

et l'expression limite simple

$$(10) \qquad f(x) = \lim_{\alpha=0} \sum_0^{\nu_\alpha} a_n \zeta(n, \alpha) x^n,$$

sont, d'après ce qui précède, complètement équivalentes entre elles, en ce sens que, si l'une d'elles est valable pour une valeur donnée de x, il en est de même de l'autre.

7. Nous allons examiner la forme géométrique des domaines S et S_f, en faisant diverses hypothèses relatives aux arguments ψ_0 et ψ_0'.

Supposons d'abord $\psi_0' = \psi_0 < \frac{\pi}{2}$. Le contour du domaine S est formé par l'arc de la spirale logarithmique $r = e^{\theta \operatorname{tang} \psi_0}$ compris entre les points $x = 1$ et $x = -e^{\pi \operatorname{tang} \psi_0}$, et le symétrique de cet arc par rapport à l'axe réel. Cette hypothèse se trouve réalisée, par exemple, dans le cas où $\zeta(z, \alpha) = e^{-\alpha z^\mu}$, μ étant un nombre positif supérieur à l'unité. Ici l'on a $\psi_0 = \psi_0' = \frac{\pi}{2\mu}$. Pour $\mu = 2$, on retrouve un résultat démontré par MM. Le Roy et Phragmén [1] à l'aide des fonctions Θ de Jacobi.

Soit maintenant $\psi_0' = \psi_0 = \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, le domaine S comprend tout le plan, excepté le segment $+1 \ldots +\infty$ de l'axe réel, et le domaine S_f se confond avec l'étoile principale A de M. Mittag-Leffler. On retrouve ainsi le résultat que nous avions énoncé à la fin de la Note citée plus haut.

---

[1] *Comptes rendus* du 5 juin 1900.

D'après les recherches de M. Borel [1], le domaine A ne constitue pas toujours une *étoile de convergence* pour l'expression limite (10), dans le sens donné à ce terme par M. Mittag-Leffler [2]. Le résultat du n° **6** fait voir que cette même remarque s'applique également à l'expression limite (9).

Soit, en dernier lieu, $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\psi_0 = \frac{\pi}{2} + \beta$, où β désigne un angle quelconque compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Le domaine S comprend tout le plan, excepté les points de la spirale logarithmique $r = e^{\omega \cot \beta}$ qui sont extérieurs au cercle $r = 1$. Quant au domaine S_f, il est facile de voir qu'on l'obtient par la construction suivante :

Imaginons qu'on prolonge analytiquement la série $\sum_0^\infty a_n x^n$ en cheminant le long de la spirale logarithmique $r = e^{\omega \cot \beta}$ dans le sens des rayons vecteurs croissants. Si l'on est arrêté par un point singulier, on mènera une coupure suivant le prolongement de la spirale depuis ce point jusqu'à l'infini. On fera ensuite tourner la spirale autour de l'origine et, pour chacune de ses positions, on procédera de la même manière.

Le domaine cherché sera formé par l'ensemble des points x ne faisant partie d'aucune des coupures dont le plan a été sillonné.

Nous désignerons le domaine ainsi construit par A_β. C'est une *étoile curviligne* qui, pour $\beta = 0$, se confond avec l'étoile principale A.

8. Le cas le plus simple des théorèmes qui précèdent correspond à l'hypothèse $\varphi(z, \alpha) = z^{-\sigma z}$, $\sigma = \alpha e^{i\beta}$, l'argument β ayant une valeur quelconque comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. L'égalité

$$|\varphi(z, \alpha)| = e^{-\alpha\rho(\log\rho \cos(\psi+\beta) - \psi \sin(\psi+\beta))}$$

montre que les hypothèses du n° **1** sont vérifiées pour la fonction

---

(1) *Acta mathematica*, t. XXIV.

(2) *Acta mathematica*, t. XXIV, p. 203.

$\zeta(z+1, \alpha)$, si l'on fait $\psi_0 = -\frac{\pi}{2} - \beta$, $\psi_0' = -\frac{\pi}{2} - \beta$, et nos théorèmes conduisent donc, dans ce cas particulier, au résultat très simple que voici :

Le paramètre σ tendant vers zéro avec un argument déterminé β compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, la fonction entière

$$\sum_0^\infty a_n \left(\frac{x}{n^\sigma}\right)^n$$

tendra uniformément vers la fonction $f(x)$, définie par la série $\sum_0^\infty a_n x^n$, dans toute aire finie intérieure au domaine A_β, lequel se confond avec l'étoile principale A, pour $\beta = 0$.

Il en sera de même du polynome

$$\sum_0^{\nu_\sigma} a_n \left(\frac{x}{n^\sigma}\right)^n,$$

à condition qu'on fasse croître ν_σ avec $\left|\frac{1}{\sigma}\right|$ de telle sorte qu'on ait constamment

$$\nu_\sigma > e^{\left|\frac{1}{\sigma}\right| \chi\left(\frac{1}{\sigma}\right)},$$

$\chi\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ étant une fonction qui croît vers l'infini, d'ailleurs aussi lentement qu'on le voudra, lorsque σ tend vers zéro.

Helsingfors, janvier 1903.

Sur la fonction définie par une série de Maclaurin;

PAR M. WALTER-B. FORD.

1. Le but de cette Note est d'étudier le problème général suivant sous quelques-uns de ses aspects les plus importants.

Étant donnée la série de Maclaurin :

$$(1) \qquad g(0) + g(1)z + g(2)z^2 + \ldots + g(n)z^n + \ldots$$

qui définit une fonction $f(z)$ de la variable complexe z dans un cercle de rayon r (centre à $z = 0$); *calculer la valeur de $f(z)$ en un point quelconque de son domaine d'existence* [1].

Nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

Si, dans la série (1), *la fonction $g(w)$ de la variable complexe w est uniforme et analytique quand on la considère pour toutes les valeurs de w dont la partie réelle est positive, et si, pour les mêmes valeurs de w, il existe une constante c telle que $\lim_{\mathrm{mod}\, w = \infty} |g(w)| < c$, alors la fonction $f(z)$ possède une branche* [*dont la série* (1) *est une partie*] *uniforme et analytique dans tout le plan* (*fini*) *de la*

[1] On trouve un résumé des résultats déjà obtenus qui concernent ce problème dans le Traité de M. Hadamard intitulé : *La série de Taylor et son prolongement analytique*. Paris, 1901.

variable $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *excepté les valeurs réelles et positives, et cette branche est définie par la formule*

$$f(z) = g(0) - \frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g\left(\frac{1}{2}+iy\right)(-z)^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur le résultat suivant dû à M. Dini [1] :

« Soient données les deux fonctions $\Phi(w)$ et $U(w)$ de la variable complexe $w(w = x + iy)$, l'une et l'autre uniformes et analytiques dans une région A du plan de la variable w, et dont la seconde ne s'annule dans A qu'aux points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ qui sont des zéros simples. Alors, si nous désignons par C_n un contour quelconque compris entièrement dans A et renfermant les points $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, mais ne passant par aucun d'eux, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\Phi(w)}{U(w)}\,dw = \sum_1^n \frac{\Phi(\lambda_n)}{U'(\lambda_n)},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C_n dans le sens positif. »

Ceci posé, pour arriver à notre but, choisissons

$$\Phi(w) = \pi g(w)(-z)^w, \qquad U(w) = \sin\pi w$$

et prenons comme contour C_n le rectangle formé par les droites

$$w = \frac{1}{2} + iy, \qquad w = x \pm ij, \qquad w = \frac{1}{2} + 2n + iy$$

(j étant une quantité positive et n un nombre entier positif quelconque).

---

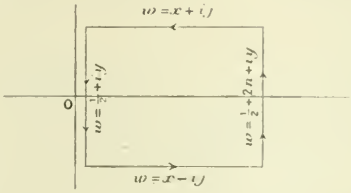
[1] *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, § 61, 62, 63; Pisa, 1880. M. Dini y obtient des résultats généraux dont celui-ci est un cas particulier.

Alors le second membre de l'égalité (2) se réduit à

$$g(1)z + g(2)z^2 + g(3)z^3 + \ldots + g(n)z^n;$$

nous pouvons donc écrire

$$(3) \qquad \sum_0^n g(n)z^n = g(0) + \frac{1}{2i}\int_{C_n} \frac{g(w)(-z)^w}{\sin \pi w}\, dw.$$



Afin d'étudier l'intégrale (3), nous écrivons $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$. Considérons d'abord le côté de C_n le long duquel $w = x + ij$. Nous avons ici

$$dw = dx$$

et l'intégration s'effectue de $x = \frac{1}{2} + 2n$ à $x = \frac{1}{2}$; le long de ce côté, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \sin \pi w = \sin(\pi x + i\pi j) &= \sin \pi x \cosh \pi j + i \cos \pi x \sinh \pi j \\ &= \sinh \pi j (\sin \pi x \coth \pi j + i \cos \pi x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-z)^w = (-z)^x e^{y(\log -z)} &= (-z)^x e^{y \log \rho - j(\varphi + \pi)} \\ &= (-z)^x e^{-j(\varphi + \pi)} [\cos(j \log \rho) + i \sin(j \log \rho)]. \end{aligned}$$

Par suite, en désignant par I_j la contribution apportée à l'intégrale (3) par le côté $w = x + ij$, il vient

$$I_j = \frac{e^{-j(\varphi + \pi)}[\cos(j \log \rho) + i \sin(j \log \rho)]}{2i \sinh \pi j} \int_{\frac{1}{2} + 2n}^{\frac{1}{2}} \frac{g(x + yi)(-z)^x}{\sin \pi x \coth \pi j + i \cos \pi x}\, dx.$$

Or, pour toutes les valeurs de x, nous avons

$$\lim_{j=\infty} |(\sin \pi x \coth \pi j + i \cos \pi x)| = 1,$$

et, grâce à notre hypothèse concernant $g(w)$, nous pouvons écrire, pour toutes les valeurs de j plus grandes qu'une quantité fixe j_0,

$$|I_j| < \frac{e^{-j(\varphi+\pi)}}{2(1-\varepsilon_j)\sinh \pi j} c \rho^{2n+\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} dx, \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \varepsilon_j < 1 \\ \lim\limits_{j=\infty} \varepsilon_j = 0 \end{array} \right. .$$

D'où, écrivant $\sinh \pi j = \frac{e^{\pi j} - e^{-\pi j}}{2}$, nous voyons que si φ a une valeur telle que nous l'avons supposée (savoir $-2\pi < \varphi < 0$), alors, en prenant $j = \infty$, on peut négliger tout de suite la contribution I_j.

On raisonnerait de même pour la contribution due au côté

$$w = x - ij.$$

Considérons donc le côté de C_n le long duquel $w = \frac{1}{2} + 2n + iy$. Nous avons ici

$$dw = i\,dy$$

et

$$\sin \pi w = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi + i\pi y\right) = \cos i\pi y = \cosh \pi y,$$

$$(-z)^w = i z^{\frac{1}{2}+2n} \{\cos[y \log(-z)] + i \sin[y \log(-z)]\}.$$

Par conséquent, si l'on se rappelle que

$$\log(-z) = \log \rho + i(\varphi + \pi),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} &\cos[y \log(-z)] \\ &\quad = \cos(y \log \rho) \cosh(\varphi + \pi) y - i \sin(y \log \rho) \sinh(\varphi + \pi) y, \\ &\sin[y \log(-z)] \\ &\quad = \sin(y \log \rho) \cosh(\varphi + \pi) y + i \cos(y \log \rho) \sinh(\varphi + \pi) y, \end{aligned}$$

on voit de suite que la contribution $I_{\frac{1}{2}+2n}$ en question peut s'écrire (ayant pris $j = \varkappa$)

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}+2n} = {} & \frac{iz^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & + \frac{z^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & - \frac{z^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ & - \frac{iz^{\frac{1}{2}+2n}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+2n+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, on voit que chacune des intégrales de (4) a une signification quand la fonction $g(w)$ satisfait aux hypothèses de notre théorème, et que $-2\pi < \varphi < 0$, comme nous l'avons supposé [1].

Enfin, le long du côté $w = \frac{1}{2} + iy$, nous avons, comme auparavant,

$$dw = i\,dy, \qquad \sin\pi w = \cosh\pi y,$$

et, par suite, la contribution provenant de cette source à l'intégrale de (3) est

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} I_{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{\frac{1}{2}+iy}}{\cosh\pi y}\,dy \\ &= -\frac{iz^{\frac{1}{2}}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy. \end{aligned}\right.$$

---

[1] Chacune de ces intégrales est, en effet, *absolument* convergente.

où, comme plus haut, nous pouvons écrire

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
I_{\frac{1}{2}} = &-\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy\\
&-\frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy\\
&+\frac{\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\sin(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy\\
&+\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{\cos(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy.
\end{aligned}
\right.
$$

Ceci dit, considérons la région du plan z située dans un cercle concentrique au cercle de convergence de (1), mais ayant un rayon η tel que $\left\{\begin{matrix}\eta < r\\ \eta < 1\end{matrix}\right.$. Pour une valeur quelconque de z dans ce cercle, nous avons

$$|z| < 1,$$

et, par suite, nous pouvons alors écrire

$$\lim_{n=\infty} I_{\frac{1}{2}+2n} = 0.$$

Mais, pour une telle valeur de z, la série (1) est convergente et ainsi nous arrivons à la conclusion que, pour une valeur quelconque de z située dans ce cercle de rayon η, excepté toujours les valeurs réelles et positives, nous avons

$$(7)\qquad f(z) = g(0) + I_{\frac{1}{2}}.$$

Or on voit, par l'égalité (6), que $I_{\frac{1}{2}}$ conserve une signification, quelle que soit la valeur (positive) de ρ, pourvu que $-2\pi < \varphi < 0$. Ainsi, (7) donne une valeur de $f(z)$ non seulement dans le cercle de rayon η, mais dans le plan entier de z, excepté les valeurs réelles et positives. D'ailleurs, dans cette région, I_1 est uniforme, puisque, quand z décrit

un chemin fermé quelconque dans cette région, on voit que les intégrales (6), tout en conservant une signification, reviennent à leurs valeurs primitives.

Il reste donc simplement à montrer que $I_{\frac{1}{2}}$ est une fonction *analytique* de z dans cette région étendue, et pour cela il suffit de montrer que la fonction [*voir* la formule (5)]

$$\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}\,dy \qquad \text{ou} \qquad \frac{i}{z}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{y(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}\,dy,$$

considérée pour une valeur quelconque de z dans cette région, est bien déterminée. Écrivant cette fonction sous une forme analogue à (6) et remarquant que les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right) y\,\frac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh \pi y}\,dy, \qquad \ldots$$

ont une signification quand $-2\pi < \varphi < 0$, nous arrivons immédiatement au résultat désiré.

2. *Exemples :*

(*a*). Considérons la série

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots \quad (^1).$$

En appliquant le théorème, nous avons, pour toutes les valeurs de $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ qui ne sont pas sur la moitié positive de l'axe réel,

$$f(z) = 1 - \frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-z)^{iy}}{\cosh \pi y}\,dy, \tag{8}$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$. D'ailleurs, en nous servant

(1) Dans ce simple cas, on sait, *a priori*, que $r = 1$ et que l'extension analytique est possible, puisque $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Des exemples de ce type sont choisis parce qu'ils ont l'avantage de montrer comme notre théorème donne des résultats conformes aux faits connus.

de (6) et en négligeant les intégrales qui se détruisent, nous trouvons

$$(9)\quad \begin{cases} f(z) = 1 - \dfrac{i\sqrt{z}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos(y\log\rho)\cosh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy \\ \qquad\qquad - \dfrac{\sqrt{z}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin(y\log\rho)\sinh(\varphi+\pi)y}{\cosh\pi y}\,dy. \end{cases}$$

(*b*). Considérons la série

$$f(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots \quad (^1).$$

Ici $g(0) = 0$ et nous pouvons prendre

$$g(w) = \frac{1}{w}.$$

Par suite, pour toutes les valeurs de $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, excepté celles qui sont réelles et positives, nous avons

$$(10)\qquad f(z) = -\frac{i\sqrt{z}}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-z)^{iy}}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)\cosh\pi y}\,dy,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$. Cette expression peut être développée facilement comme auparavant.

(*c*). Considérons la série

$$(11)\quad f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{1.3}{2.4}z^2 + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6.8\ldots 2n}z^n + \ldots \quad (^2).$$

Ici on peut prendre

$$g(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{dv}{(v^2+1)^{w+1}}.$$

---

(1) *i. e.*, $f(z) = -\log(1-z)$.

(2) *i. e.*, $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-z}}$.

En effet, cette fonction de w est analytique dans la moitié droite du plan w, et quand w est égale à un nombre entier positif n elle se réduit par des méthodes bien connues au $n^{\text{ième}}$ coefficient de (11). En outre, en désignant par $p\,(p > 0)$ la partie réelle de w, nous avons

$$|g(w)| < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{(v^2+1)^{p+1}} < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{dv}{v^2+1} = 1,$$

de sorte que toutes les conditions exigées de $g(w)$ sont satisfaites.

Par suite, nous avons ici, pour toutes les valeurs de

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

en dehors de la moitié positive de l'axe réel,

$$f(z) = 1 - \frac{i\sqrt{z}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty \frac{(-z)^{iy}}{(v^2+1)^{\frac{1}{2}+iy}\cosh\pi y}\,dy\,dv,$$

en supposant toujours que $-2\pi < \varphi < 0$.

(d). Considérons la série

$$(12)\quad f(z) = g(0) - g(1)z + g(2)z^2 - \ldots + (-1)^n g(n)z^n + \ldots,$$

où $g(w)$ satisfait aux conditions du théorème et où le rayon du cercle de convergence est fini.

Ici, nous n'avons qu'à substituer $z = -z'$ dans le théorème pour voir tout de suite que la fonction définie en partie par (12) possède une branche qui est uniforme et analytique dans tout le plan fini, excepté les valeurs réelles et négatives. D'ailleurs, dans cette région, nous avons

$$f(z) = g(0) - \frac{\sqrt{z}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{1}{2}+iy\right)\frac{z^{iy}}{\cosh\pi y}\,dy,$$

où, si nous posons $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, nous supposons toujours que $-\pi < \varphi < \pi$.

(e). Considérons la série

$$(13)\quad f(z) = g(0) - g(1)z^2 + g(2)z^4 - \ldots + (-1)^n g(n)z^{2n} + \ldots.$$

où $g(w)$ satisfait aux conditions du théorème et le rayon du cercle de convergence est fini.

Ici, si nous substituons $z = -z'^2$ dans le théorème, nous arrivons à la conclusion que la fonction $f(z)$ définie en partie par (13) possède une branche uniforme et analytique dans tout le plan fini, excepté les valeurs de z dont l'argument est $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$. D'ailleurs, nous pouvons construire la fonction donnant cette extension et en étudier les caractéristiques.

Nous ne donnerons pas d'autres exemples de l'application de cette méthode à l'étude de séries spéciales, croyant que nous avons montré suffisamment le rapport important que la formule (2) a avec notre sujet. On ne peut, il est vrai, employer cette formule que quand les coefficients donnés suivent une loi analytique, mais même avec cette restriction son utilité reste encore très grande.

Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides;

PAR M. P. DUHEM.

CHAPITRE I.

CONDITIONS QUI SUFFISENT A ASSURER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE.

§ 1. — La recherche de ces conditions ne relève pas exclusivement du calcul des variations.

On sait que Lagrange a énoncé et démontré cette proposition :

Un système mécanique soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel est assurément en équilibre stable dans un état où le potentiel des forces a une valeur minimum.

La démonstration de Lagrange laissait quelque peu à désirer à ceux qui ont souci de la rigueur; Lejeune-Dirichlet lui a donné une forme qui la sauve de toute objection.

Lorsque la Mécanique générale, fondée sur la Thermodynamique, est venue étendre à de nouveaux domaines les méthodes de l'ancienne Mécanique, on a dû rechercher si la proposition de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet était susceptible d'une plus grande extension et dans quelles circonstances cette extension était légitime.

Il était naturel d'examiner tout d'abord les systèmes mécaniques

que forment un nombre fini de corps, chacun de ces corps correspondant à une seule température et étant défini par un nombre limité de variables indépendantes.

On ne tarda pas à reconnaître que la possibilité d'étendre la proposition de Lejeune-Dirichlet à de tels systèmes était subordonnée à cette autre question : *Le système admet-il une énergie utilisable?*

Cette grandeur, lorsqu'elle existe, est caractérisée par la propriété suivante :

Au cours d'une modification réelle élémentaire, on a

$$d\bar{\varepsilon}_e + d\bar{\varepsilon}_v = d\Theta + d\mathcal{E}, \tag{1}$$

$d\bar{\varepsilon}_e$ étant le travail externe,
$d\bar{\varepsilon}_v$, le travail de viscosité,
Θ, la force vive,
$\mathcal{E}$, l'énergie utilisable.

Cette énergie utilisable n'existe pas en tous les systèmes et dans toutes les circonstances [1].

Seuls, certains systèmes, très particuliers, admettent en toutes circonstances une énergie utilisable; ces systèmes comprennent ceux qu'étudiait l'ancienne Mécanique; aussi les avons-nous parfois nommés les *systèmes classiques*. Pour ces systèmes, l'énergie utilisable se confond avec l'équivalent mécanique de la partie de l'énergie interne qui dépend de la configuration du système, ou, encore, ce qui revient au même dans ce cas, avec le potentiel des actions intérieures.

Aucun système, autre que les systèmes classiques, n'admet d'énergie utilisable en toutes circonstances et quelle que soit la forme des *relations supplémentaires*; en revanche, quel que soit le système, certaines formes de relations supplémentaires assurent l'existence d'une énergie utilisable.

Ces formes peuvent se classer en deux catégories :

1° La première catégorie correspond aux *mouvements isother-*

---

[1] *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IV, 1898, p. 5).

miques; si, pendant toute la durée du mouvement, la température de chacun des corps qui composent le système est maintenue invariable, tout en différant peut-être d'un corps à l'autre, le système admet une énergie utilisable, qui est alors identique au *potentiel interne*.

2° La seconde catégorie correspond aux *mouvements* que l'on peut nommer *entropiques;* pendant la durée d'un tel mouvement, l'entropie de chaque corps ne dépend que de sa température; la forme de l'énergie utilisable, dans ce cas, dépend de la forme de la relation qui existe entre l'entropie et la température.

Parmi ces relations, la plus simple et la plus remarquable consiste à maintenir invariable l'entropie de chacune des parties du système; de semblables *mouvements isentropiques* caractérisent un système dénué de viscosité et dont les diverses parties ne peuvent céder de chaleur les unes aux autres; en ces mouvements, l'énergie utilisable n'est autre que l'équivalent mécanique de l'énergie interne.

A chacun de ces cas où il existe une énergie utilisable, la proposition de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet peut être étendue sans difficulté; si les actions extérieures admettent un potentiel, le minimum de la somme $\Phi = \mathcal{E} + \Omega$ de l'énergie utilisable $\mathcal{E}$ et du potentiel externe Ω assure la stabilité de l'équilibre du système; toutefois, en énonçant cette proposition, deux remarques doivent être faites, qui concernent les systèmes où l'énergie utilisable résulte des relations supplémentaires :

1° A partir de l'état considéré, la grandeur Φ doit être croissante non pas pour tous les changements possibles du système, mais seulement pour les changements qui respectent les relations supplémentaires d'où découlent l'existence et la forme de l'énergie utilisable.

2° Le minimum de Φ n'assure la stabilité de l'équilibre qu'autant que l'on suppose exclus les mouvements qui transgresseraient ces mêmes relations supplémentaires.

Des systèmes définis par un nombre limité de variables indépendantes passons aux systèmes continus; ceux-ci sont décomposables en une infinité d'éléments infiniment petits; à chaque élément correspondent une température et un nombre limité de variables. Parmi ces systèmes, les *fluides* sont les plus simples.

Il est aisé d'étendre aux corps fluides ([1]) les propositions qui définissent les conditions d'existence de l'énergie utilisable.

L'énergie utilisable existe, quelles que soient les relations supplémentaires, pour un *fluide incompressible*, dont chaque élément garde, au cours du mouvement, une densité invariable; les fluides incompressibles tiennent, en Hydrodynamique, le rôle des systèmes classiques.

L'existence de l'énergie utilisable, pour les fluides compressibles, est subordonnée à la forme de la relation supplémentaire.

L'énergie utilisable existe, en premier lieu, si le fluide est animé d'un *mouvement isothermique;* au cours de ce mouvement, chaque élément garde une température invariable qui, d'ailleurs, peut différer d'un élément à l'autre. L'énergie utilisable coïncide alors avec le potentiel interne.

L'énergie utilisable existe, en second lieu, si le fluide est animé d'un *mouvement entropique;* l'entropie de cet élément est alors une fonction de sa température seule; la forme de cette fonction règle la forme de l'énergie utilisable.

Parmi ces mouvements sont les *mouvements isentropiques*; l'entropie de chaque élément garde une valeur invariable, qui peut d'ailleurs différer d'un élément à l'autre; l'énergie utilisable est l'équivalent mécanique de l'énergie interne. Ces mouvements sont ceux que peut prendre un fluide dénué de viscosité et de conductibilité.

Si l'extension aux systèmes continus, et particulièrement aux fluides, des propositions relatives à l'existence de l'énergie utilisable ne rencontre aucune difficulté digne d'être mentionnée, il en est autrement du théorème de Lagrange et de Lejenne-Dirichlet; son extension aux systèmes continus donne lieu à d'importantes remarques ([2]).

([1]) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. II, § 1 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 355).

([2]) *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 362). — *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de*

Il est encore permis d'énoncer la proposition suivante :

Prenons un état d'équilibre où le potentiel Φ ait une valeur moindre qu'en tout état *voisin ;* nous pourrons toujours placer le système dans un état initial assez *voisin* de l'état d'équilibre, lui donner une force vive initiale assez *voisine* de zéro, pour que l'état du système au bout d'un laps de temps quelconque soit toujours aussi *voisin* que l'on voudra de l'état d'équilibre, que sa force vive soit toujours aussi *voisine* que l'on voudra de zéro.

Non seulement cet énoncé donnera lieu aux observations déjà développées touchant les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de paramètres : tous les changements réels ou virtuels du système devront se conformer aux relations supplémentaires qui assurent l'existence de l'énergie utilisable et en déterminent la forme, si le système n'est point classique. Mais encore le mot *état voisin*, qui figure à plusieurs reprises dans cet énoncé, devra être entendu dans un sens distinct de son sens habituel.

Habituellement, deux états d'un système continu sont *voisins* l'un de l'autre si les variables qui se rapportent à un élément de masse quelconque dans le premier état diffèrent infiniment peu des variables qui se rapportent au même élément de masse dans le second état.

Dans l'énoncé précédent, deux états sont dits *voisins* lorsque les conditions que nous venons de rappeler sont remplies par toutes les masses élémentaires du système, *sauf peut-être par certains éléments dont l'ensemble forme une masse infiniment petite ;* les variables qui caractérisent un de ces éléments dans le premier état du système peuvent différer de quantités finies des variables qui caractérisent ce même élément dans le second état.

Ce changement de sens apporté au mot *voisin* entraîne une conséquence grave.

Une grandeur, Φ par exemple, est minimum dans un état donné du système, lorsqu'elle y a une plus petite valeur qu'en tout état *voisin*. Si l'on adopte le *sens habituel* du mot *voisin*, la recherche des condi-

---

Mathématiques, 5e série, t. VII, 1901, p. 311). — *Sur la stabilité pour les perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme* (*Ibid.*, t. VIII, 1902, p. 5).

tions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système peut être conduite en suivant les méthodes du calcul des variations. Il n'en est plus de même si l'on entend le mot *voisin* au *nouveau sens;* il est clair alors que la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système excède la portée légitime du calcul des variations.

A la vérité, les états qui sont, au *sens habituel* du mot, *voisins* d'état donné sont compris parmi ceux qui en sont *voisins* au nouveau sens; les conditions indiquées par le calcul des variations comme conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ soit minimum dans un état donné du système demeurent nécessaires, mais elles peuvent fort bien ne plus être suffisantes; rien ne nous permet donc d'affirmer qu'elles suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre du système.

Il est clair, au contraire, que, si, dans un certain état du système, Φ est un *minimum absolu,* le changement de sens du mot *voisin* dans l'énoncé du théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet n'a plus rien qui nous puisse inquiéter; en cet état, l'équilibre du système est assurément stable. Cette remarque fait comprendre l'importance des propositions qui vont être démontrées.

Quelques observations doivent précéder la démonstration de ces théorèmes.

La plupart des développements de l'Hydrodynamique sont, pour les fluides exempts de viscosité, subordonnés à la restriction suivante :

Il existe une fonction A telle que les équations de l'Hydrodynamique puissent se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + g_x = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial y} + g_y = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial z} + g_z = 0,$$

où g_x, g_y, g_z sont les composantes de l'accélération.

Or cette restriction ne se trouve vérifiée que dans certains cas particuliers que nous avons appris ailleurs [1] à distinguer et à classer.

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique;* 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique,* Chap. III (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. III, 1901, p. 368).

Nous avons remarqué que la plupart des théorèmes dits *généraux* de l'Hydrodynamique n'étaient établis que dans les circonstances où il existe à la fois une énergie utilisable et une fonction A; ces circonstances, peu nombreuses, sont les suivantes :

1° Le fluide est homogène et incompressible;

2° Le fluide est isothermique, c'est-à-dire qu'il est homogène, compressible, et qu'il est en tous ses points porté à une même température qui demeure invariable pendant toute la durée du mouvement;

3° Le fluide est entropique, c'est-à-dire que l'entropie spécifique en chaque point est liée à la température en ce point par un relation qui demeure la même dans toute l'étendue du fluide et à tout instant.

Cette dernière catégorie comprend, en particulier, le cas où le fluide est isentropique, c'est-à-dire où le fluide se meut, à partir d'un état initial homogène, de telle sorte que l'entropie de chaque masse élémentaire demeure invariable.

Ces trois catégories de fluides sont les seules que nous étudierons au cours du présent travail; encore ne les prendrons-nous pas dans leur entière généralité; nous supposerons que les diverses masses élémentaires qui les composent n'exercent les unes sur les autres aucune action; les actions, tout extérieures, auxquelles nos fluides seront supposés soumis, se réduiront à des actions, newtoniennes ou non, appliquées aux divers éléments de masse et à une pression uniforme et constante appliquée à la partie déformable de la surface. De plus, nous supposerons les fluides étudiés exempts de toute viscosité.

§ 2. — En un état d'équilibre stable, le potentiel total est un minimum absolu. Cas du fluide homogène et incompressible.

Soit ρ la densité d'un fluide incompressible homogène et soit $V(x, y, z)$ la fonction potentielle des forces extérieures qui le sollicitent. Si $d\varpi$ est un élément de volume de ce fluide, le potentiel total a pour valeur

$$\Phi = \rho \int V d\varpi. \tag{2}$$

Le calcul des variations permet de former les conditions nécessaires et suffisantes [1] pour que cette grandeur soit plus petite dans un état donné du fluide que dans tout état *voisin* de celui-là, le mot *voisin* étant pris dans son sens habituel.

Ces conditions comprennent, tout d'abord, les conditions de l'équilibre hydrostatique, lesquelles se réduisent ici à deux :

La pression hydrostatique n'est jamais négative. — La partie déformable de la surface du fluide est une surface d'égal niveau potentiel.

En outre, elles comprennent une condition d'inégalité :

Soit n la normale à la surface déformable, dirigée vers l'intérieur du fluide; la grandeur $\frac{\partial V}{\partial n}$ ne doit être positive en aucun point de la surface; les points où cette grandeur est nulle n'y doivent pas former une aire d'étendue finie.

Nous supposerons la fonction V uniforme, en sorte que deux surfaces de niveau distinctes ne puissent se couper; nous supposerons en outre que, dans la région de l'espace où notre fluide peut se mouvoir, V ne présente ni maximum ni minimum, en sorte que nulle surface de niveau ne se ferme sur elle-même.

La surface $V = V_0$, qui forme la limite du fluide en équilibre, partage ainsi l'espace en deux régions; l'une, que nous nommerons la *région supérieure*, où V surpasse V_0; l'autre, que nous nommerons la *région inférieure*, où V est inférieur à V_0. Selon la condition indiquée tout à l'heure, cette dernière région contient une partie de la masse fluide; nous supposerons qu'elle la contient tout entière.

Les parois du vase indéformable qui maintiennent le fluide se composent de deux parties; une de ces parties est mouillée par le liquide en équilibre; elle se trouve assurément tout entière dans la *région inférieure;* une autre n'est pas touchée par le fluide en équilibre; *nous supposons que cette seconde partie des parois se trouve tout entière dans la région supérieure.*

Dès lors, il est aisé de voir que la condition donnée par le calcul des

---

[1] *Des principes fondamentaux de l'Hydrostatique*, § 4 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, 1890, p. C. 28).

variations entraîne cette autre, qui assure pleinement la stabilité de l'équilibre :

Dans l'état considéré du système, la grandeur Φ *est un minimum absolu.*

Considérons, en effet, le fluide dans un autre état quelconque. Nous pourrons distinguer dans l'espace quatre régions :

La région 0 n'est occupée par le liquide ni dans le premier état, ni dans le second.

La région 1 est occupée par le fluide aussi bien dans le premier état que dans le second.

La région 2 est occupée par le fluide dans le premier état, mais non dans le second.

Enfin, la région 3 est occupée par le fluide dans le second état, mais non dans le premier.

Dès lors, si Φ se rapporte au premier état et Φ' au second, il est aisé de voir que l'on a

$$\Phi' - \Phi = \rho \int_3 V\, d\varpi - \rho \int_2 V\, d\varpi. \tag{3}$$

L'incompressibilité du fluide exige que l'on ait

$$\int_3 d\varpi - \int_2 d\varpi = 0.$$

L'égalité (3) peut donc s'écrire

$$\Phi' - \Phi = \rho \int_3 (V - V_0)\, d\varpi - \rho \int_2 (V - V_0)\, d\varpi. \tag{4}$$

Mais la partie 3 de l'espace est nécessairement dans la *région supérieure*, en sorte que $(V - V_0)$ y est positif, tandis que la partie 2 est dans la *région inférieure*, en sorte que $(V - V_0)$ y est négatif. L'égalité (3) montre alors que $(\Phi' - \Phi)$ est positif, ce qui établit le théorème énoncé.

§ 3. — Cas du fluide isothermique soumis à des actions extérieures newtoniennes.

Passons au cas d'un fluide homogène, compressible, dont la température uniforme garde une valeur invariable. Supposons ce fluide soumis à des actions extérieures qui se composent, d'une part, de forces newtoniennes, appliquées aux diverses masses élémentaires et dérivant d'une fonction potentielle $V(x, y, z)$; d'autre part, d'une pression normale, uniforme et constante P, appliquée à la partie déformable de la surface. Si ρ est la densité du fluide, la masse élémentaire dm admet un potentiel interne $\zeta(\rho, T)\,dm$, où il va être inutile de faire figurer la température T, qui est une constante. La grandeur Φ a pour valeur, dans ce cas,

$$\Phi = \int [\rho(V + \zeta) + P]\, d\varpi. \tag{5}$$

Le calcul des variations nous fait connaître [1] les conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ ait, dans un état donné du fluide, une valeur plus petite que dans tout état *voisin*, ce mot étant entendu au *sens habituel*.

Ces conditions sont les suivantes :

Il existe une quantité C, constante dans toute l'étendue de la masse fluide, telle que l'on ait, en tout point de cette masse,

$$V + \zeta(\rho) + \rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = C. \tag{5 bis}$$

En chaque point de la masse fluide, la pression H est donnée par l'égalité

$$H = \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}. \tag{6}$$

Cette pression n'est négative en aucun point du fluide.

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants*, Chap. I, § 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 133).

En chaque point de la surface déformable elle prend la valeur P.

La quantité $\frac{\partial V}{\partial n}$ n'est positive en aucun point de la surface déformable; les points où elle est nulle ne forment pas, en cette surface, une aire d'étendue finie.

La quantité

$$(7) \qquad J(\rho) = 2\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}$$

n'est négative en aucun point de la masse fluide; les points où elle est nulle ne forment pas, en cette masse, un volume fini.

Conservons les notations et les conventions du cas précédent.

En chaque point de la *région supérieure*, nous pouvons définir une densité fictive ρ par l'équation (5); la valeur correspondante de H, donnée par l'égalité (6), pourra, en certaines circonstances, n'être plus positive; mais *nous admettrons que la valeur de* $J(\rho)$ *qui correspond à ces valeurs fictives de* ρ *continue à être positive*, de manière qu'elle est positive pour toute valeur réelle de la densité.

Dans ces hypothèses, nous allons prouver que, *si les conditions précédentes sont toutes remplies, la valeur de* Φ *est un minimum absolu, ce qui assure la stabilité de l'équilibre.*

Donnons, en effet, comme dans le cas précédent, un déplacement fini au fluide; soit ρ' la densité au sein de l'élément $d\varpi$ après ce déplacement. Nous aurons

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_1 [\rho' V + \rho'\zeta(\rho') - \rho V - \rho\zeta(\rho)]\,d\varpi \\ & + \int_3 [\rho V + \rho'\zeta(\rho') + P]\,d\varpi \\ & - \int_2 [\rho V + \rho\zeta(\rho) + P]\,d\varpi, \end{aligned}\right.$$

tandis que la conservation de la masse du fluide s'exprimera par l'égalité

$$(9) \qquad \int (\rho' - \rho)\,d\varpi + \int_3 \rho'\,d\varpi - \int_2 \rho\,d\varpi = 0.$$

Il est clair que cette condition (9), jointe à la définition de la densité fictive ρ en tout point de la région 3, nous permet d'écrire l'égalité (8) sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C] d\varpi \\ & + \int_2 [\rho V + \rho \zeta(\rho) - \rho C + P] d\varpi \\ & - \int_3 [\rho V + \rho \zeta(\rho) - \rho C + P] d\varpi\end{aligned}$$

ou bien, en désignant par ρ_0 la densité donnée par l'égalité

$$\rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} = P$$

que prend le fluide le long de la surface déformable, et en tenant compte de l'égalité (5),

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned}\Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C] d\varpi \\ & + \int_2 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi \\ & - \int_3 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi.\end{aligned} \right.$$

L'égalité (5), différentiée, donne

$$dV + \frac{J(\rho)}{\rho} d\rho = 0.$$

$J(\rho)$ étant toujours positif, nous voyons que la valeur, réelle ou fictive, de ρ en un point de l'espace est une fonction décroissante de la valeur de V au même point; $(\rho - \rho_0)$ est donc positif dans la région 2 et négatif dans la région 3.

D'ailleurs, le même signe de $J(\rho)$ nous enseigne que

$$\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}$$

est une fonction croissante de ρ. Nous aurons donc

$$(11)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_2 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi > 0, \\ \displaystyle\int_3 \left[\rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} - \rho_0^2 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0}\right] d\varpi < 0. \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(\rho') = \rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C.$$

Nous aurons

$$\frac{dF(\rho')}{d\rho'} = V + \zeta(\rho') + \rho' \frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} - C,$$

$$\frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2} = 2\frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} + \rho' \frac{d^2\zeta(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{J(\rho')}{\rho'}.$$

$F(\rho)$ est évidemment nul; il en est de même de $\frac{dF(\rho)}{d\rho}$, en vertu de l'égalité (5); enfin, $J(\rho')$ étant positif, il en est de même de $\frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2}$. $F(\rho')$ est donc positif pour toute valeur de ρ' qui diffère de ρ et nous pouvons écrire l'inégalité

$$(12)\qquad \int_{1+2} [\rho' V + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho V - \rho \zeta(\rho) + \rho C]\, d\varpi > 0.$$

L'égalité (10) et les inégalités (11) et (12) donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0$$

et le théorème énoncé est démontré.

§ 4. — Cas du fluide homogène et compressible, soumis à des actions extérieures non newtoniennes.

Il suffit de compliquer fort peu l'analyse précédente pour qu'elle s'étende au cas où les actions extérieures appliquées aux divers éléments de la masse fluide ne sont plus newtoniennes [1].

Dans ce cas, la fonction potentielle de ces actions en un point ne sera pas déterminée par la seule connaissance des coordonnées (x, y, z) de ce point; pour la connaître, il faudra connaître en outre la nature du fluide qui se trouve en ce point et sa densité ρ; nous pourrons donc la représenter par $U(\rho, x, y, z)$ et écrire

$$\Phi = \int [\rho U(\rho) + \rho \zeta(\rho) + P] d\varpi. \tag{13}$$

Le calcul des variations indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que, en un certain état du fluide, cette grandeur Φ soit plus petite qu'en tout état *voisin*, ce mot étant pris au *sens habituel*. Ces conditions sont les suivantes :

1° Il existe une grandeur C, de même valeur en tout point du fluide, telle que l'on ait

$$U(\rho) + \rho \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \zeta(\rho) + \rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = C. \tag{14}$$

2° La pression H est une fonction uniforme de x, y, z qui vérifie, en tout point du fluide, l'égalité

$$\rho^2 \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} = H. \tag{15}$$

A la surface déformable du fluide, cette grandeur a la valeur invariable P. Elle n'est négative en aucun point du fluide.

---

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles.* § 4 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 175).

3° Soient n la demi-normale à la surface terminale, dirigée vers l'intérieur du fluide, et α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec les axes de coordonnées.

L'expression

$$\frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial y}\beta + \frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial z}\gamma = \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n}$$

n'est positive en aucun point de la surface déformable du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.

Cette dernière condition peut se mettre sous une autre forme. En effet, l'égalité (15) donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \rho^2 \frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho\, \partial n} + \left[2\rho \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + 2\rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right] \frac{\partial \rho}{\partial n},$$

tandis que l'égalité (14) permet d'écrire

$$\frac{\partial U(\rho)}{\partial n} + \rho \frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho\, \partial n} + \left[\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + 2\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho \frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\right] \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0.$$

De ces deux égalités, on tire

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = \rho \left[\frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\partial U(\rho)}{\partial n}\right].$$

La condition précédente peut donc s'énoncer ainsi :

La grandeur $\frac{\partial \Pi}{\partial n}$ n'est négative en aucun point de la surface déformable; les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.

4° La grandeur

$$(16) \qquad J = 2\rho \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho^2} + 2\rho \frac{d\zeta(\rho)}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}$$

n'est négative en aucun point du fluide; les points où elle est nulle ne forment pas un volume d'étendue finie.

Nous admettrons, dans ce qui va suivre, que la quantité $J(\rho, x, y, z)$ est positive, en chaque point (x, y, z), non seulement pour la valeur ρ qu'y prend la densité du fluide en équilibre, mais encore pour toutes les valeurs qu'y peut prendre cette densité, entre o et l'inverse du covolume à la température de l'expérience.

Considérons une région de l'espace non occupée par le fluide, celui-ci se trouvant dans un état où toutes les conditions précédentes sont vérifiées. A chaque point de cette région, nous pourrons, par l'équation (14), faire correspondre une valeur fictive de ρ, puis, par l'égalité (15), une valeur fictive de Π; cette dernière valeur pourra être négative.

Nous supposons que la fonction $U(\rho, x, y, z)$, considérée comme fonction des variables x, y, z explicitement écrites, est une fonction uniforme; alors, la densité fictive ρ, définie par l'équation (14), sera, elle aussi, une fonction uniforme de x, y, z; si, en effet, en un point (x, y, z), l'équation (14) était vérifiée par deux valeurs distinctes et positives de ρ, il existerait une troisième valeur de ρ, comprise entre les deux premières, qui annulerait la dérivée par rapport à ρ du premier membre de l'égalité (14); or cette dérivée, $\frac{J(\rho)}{\rho}$, est essentiellement positive.

La valeur fictive de Π, que définit l'égalité (15), est une fonction uniforme de ρ et de x, y, z, partant une fonction uniforme des variables x, y, z.

Nous supposerons que, quelle que soit la valeur constante attribuée à ρ, la fonction $U(\rho, x, y, z)$ n'admette de maximum ni de minimum dans le champ des variables (x, y, z); ou, pour parler d'une manière plus précise, qu'il n'existe aucun point (x, y, z), ni aucune valeur de ρ, telles que l'on ait à la fois les trois égalités

$$\frac{\partial}{\partial x} U(\rho, x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U(\rho, x, y, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U(\rho, x, y, z) = 0.$$

Les égalités (14) et (15) donnent

$$\frac{J}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial x} + \rho\frac{\partial^2 U(\rho, x, y, z)}{\partial\rho\,\partial x} = 0,$$

$$J\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho^2\frac{\partial^2 U(\rho, x, y, z)}{\partial\rho\,\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}.$$

On en tire la première des égalités

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\rho\frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\rho\frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\rho\frac{\partial U(\rho, x, y, z)}{\partial z}.$$

Nous voyons alors qu'il n'existe aucun point de l'espace où l'on ait à la fois

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Nous pouvons, aussi bien dans la région occupée par le fluide que dans la région où il ne se trouve pas, tracer la famille de surfaces $H = \text{const.}$, H étant une fonction uniforme de x, y, z; deux de ces surfaces ne peuvent se couper; une de ces surfaces ne peut non plus être une surface fermée, puisque H n'est maximum ni minimum en aucun point de l'espace.

La surface déformable du fluide est une de ces surfaces, la surface $H = P$. Elle divise l'espace en deux régions : une *région supérieure*, où H est inférieur à P, et une *région inférieure*, où H est supérieur à P.

D'après ce que nous avons vu, la partie du fluide qui confine à la surface déformable se trouve dans la *région inférieure; nous supposerons que la masse fluide s'y trouve tout entière*; alors, en aucun point occupé par le fluide en équilibre, la pression H ne sera inférieure à P.

Nous admettrons que la partie, non mouillée par le fluide, en

équilibre, des parois du vase qui contient le fluide se trouve tout entière dans la région supérieure.

Dans ces hypothèses, les conditions énoncées précédemment entraînent cette conséquence :

La grandeur Φ est un minimum absolu.

Gardant alors, autant que possible, les notations des Paragraphes précédents, nous pourrons écrire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_1 [\rho' U(\rho') + \rho' \zeta(\rho') - \rho U(\rho) - \rho \zeta(\rho)]\, d\varpi \\ & + \int_3 [\rho' U(\rho') + \rho' \zeta(\rho') + P]\, d\varpi \\ & - \int_2 [\rho U(\rho) + \rho \zeta(\rho) + P]\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

La conservation de la masse fluide s'exprime encore ici par l'égalité

$$(9)\qquad \int_1 (\rho' - \rho)\, d\varpi + \int_3 \rho'\, d\varpi - \int_2 \rho\, d\varpi = 0.$$

Les égalités (14) et (15), vérifiées en tout point de l'espace, jointes à l'égalité (9), permettent de mettre l'égalité (17) sous la forme

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi' - \Phi = & \int_{1+3} [\rho' U(\rho') + \rho' \zeta(\rho) - \rho' C - \rho U(\rho) - \rho \zeta(\rho) - \rho C]\, d\varpi \\ & + \int_2 (H - P)\, d\varpi + \int_3 (P - H)\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Le volume 2 est sûrement dans la *région inférieure* et le volume 3 dans la *région supérieure;* à moins donc que ces volumes ne s'évanouissent, on a

$$\int_2 (H - P)\, d\varpi > 0,$$

$$\int_3 (H - P)\, d\varpi > 0.$$

D'autre part, considérons l'expression

$$F(\rho') = \rho' U(\rho') + \rho' \zeta(\rho') - \rho' C - \rho U(\rho) - \rho \zeta(\rho) + \rho C.$$

Nous aurons

$$\frac{dF(\rho')}{d\rho'} = U(\rho') + \rho'\frac{\partial U(\rho')}{\partial \rho'} + \zeta(\rho') + \rho'\frac{d\zeta(\rho')}{d\rho'} = C,$$

$$\frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{J}{\rho}.$$

Visiblement, $F(\rho) = 0$; selon l'égalité (14), il en est de même de $\frac{dF(\rho)}{d\rho}$, tandis que $\frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2}$ est positif quel que soit ρ'; on a donc, pour toute valeur de ρ' différente de ρ,

$$F(\rho') = \rho' U(\rho') + \rho'\zeta(\rho') - \rho' C - \rho U(\rho) - \rho\zeta(\rho) + \rho C > 0.$$

Les trois inégalités qui viennent d'être établies, jointes à l'égalité (18), donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0,$$

qui démontre le théorème énoncé.

§ 5. — Cas du fluide entropique.

Considérons un fluide homogène et compressible. Supposons le soustrait à toute action extérieure, sauf à celle d'une pression normale et uniforme P. Supposons, en outre, que la température T ait initialement la même valeur en tous les points du fluide. La densité du fluide en équilibre aura partout une même valeur ρ, liée à la pression P et à la température T par l'égalité

$$(19) \qquad P = \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}.$$

Imaginons qu'en tout mouvement à partir de cet état d'équilibre, la densité ρ et la température T soient, pour chaque point matériel, liées par la relation

$$(20) \qquad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = -E s(T),$$

où $s(T)$ est une fonction de la température T, la même pour tous les points, et où E est l'équivalent mécanique de la chaleur. Posons, en outre,

$$(20\ bis) \qquad S(T) = \int s(T)\, dT.$$

Nous aurons

$$(21) \qquad \Phi = \int [\rho\zeta(\rho, T) + E\rho S(T) + P]\, d\varpi.$$

Le calcul des variations nous donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que Φ ait, dans l'état d'équilibre considéré, une valeur plus petite qu'en tout état voisin, le mot *voisin* étant pris au *sens habituel*.

Outre les conditions d'équilibre déjà mentionnées, on obtient de la sorte la condition suivante [1] :

La quantité

$$(22) \qquad J = \frac{dP}{d\rho} = 2\rho \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} \frac{dT}{d\rho}$$

est positive.

On a d'ailleurs, en vertu de l'égalité (20),

$$(23) \qquad \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T} + \left[\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\frac{ds(T)}{dT}\right] \frac{dT}{d\rho} = 0,$$

ce qui permet d'écrire l'égalité (22) sous la forme

$$(24) \qquad J = 2\rho \frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \rho^2 \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho^2} + \frac{\rho^2 \left[\dfrac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\right]^2}{\dfrac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\dfrac{ds(T)}{dT}}.$$

Nous admettrons que cette quantité est positive pour toute valeur acceptable de la densité ρ et de la température T.

---

[1] *Sur la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant*, Chap. I, § 5 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. I, 1895, p. 131).

Nous allons montrer que, dans l'état d'équilibre initial du fluide, la quantité Φ est un minimum absolu.

Soit dm un élément de masse du système; soient ρ', T' sa densité et sa température dans un état quelconque; visiblement, nous pourrons écrire

$$(25)\qquad \Phi' - \Phi = \int \left[\zeta(\rho', T') + ES(T') + \frac{P}{\rho'} - \zeta(\rho, T) - ES(T) - \frac{P}{\rho} \right] dm.$$

ρ' et T' étant liés par la relation

$$(26)\qquad \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial T'} = -Es(T'),$$

nous pouvons écrire

$$(27)\qquad F(\rho') = \rho' \left[\zeta(\rho', T') + ES(T') + \frac{P}{\rho'} - \zeta(\rho, T) - ES(T) - \frac{P}{\rho} \right].$$

De là, nous tirons

$$\frac{dF(\rho')}{d\rho'} = \zeta(\rho', T) + \rho' \frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial \rho'} + ES(T') - \zeta(\rho, T) - \frac{P}{\rho} - ES(T)$$
$$+ \rho' \left[\frac{\partial \zeta(\rho', T)}{\partial T'} + E \frac{dS(T')}{dT'} \right] \frac{dT}{d\rho'}$$

ou bien, en vertu des égalités (20 *bis*) et (26),

$$(28)\qquad \frac{dF(\rho')}{d\rho'} = \zeta(\rho', T) - \zeta(\rho, T) + ES(T') - ES(T) + \rho' \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} - \frac{P}{\rho}.$$

Nous trouvons ensuite

$$\frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2} = 2 \frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'} + \rho'^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho', T')}{\partial \rho'^2} + \left[\frac{\partial \zeta(\rho', T')}{\partial T'} + E \frac{dS(T')}{dT'} \right] \frac{dT}{d\rho'}$$
$$+ \rho'^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho', T')}{\partial \rho' \, \partial T'} \frac{dT}{d\rho'}$$

ou bien, en vertu des égalités (20 *bis*), (26) et (23),

$$(29)\qquad \frac{d^2 F(\rho')}{d\rho'^2} = \frac{A(\rho', T')}{\rho'}.$$

L'égalité (27) montre que $F(\rho) = 0$; en tenant compte de l'égalité (19), l'égalité (28) montre également que $\frac{dF(\rho)}{d\rho} = 0$; enfin l'égalité (29) prouve que $\frac{d^2F(\rho')}{d\rho'^2}$ est positif quel que soit ρ'. $F(\rho')$ est donc positif pour toute valeur de ρ' qui diffère de ρ, et il en est de même de $\frac{F(\rho')}{\rho'}$. Alors les égalités (25) et (27) donnent l'inégalité

$$\Phi' - \Phi > 0.$$

qui démontre le théorème énoncé.

CHAPITRE II.

ÉTUDE CINÉMATIQUE DES PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES.

---

§ 1. — Étude cinématique des petits mouvements quelconques.

Considérons un fluide qui exécute de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre.

Le point matériel qui, dans le fluide en équilibre, aurait pour coordonnées x_0, y_0, z_0 a pour coordonnées à l'instant t, au sein du fluide en mouvement, les nombres x, y, z; si nous posons

$$(1) \qquad x = x_0 + a, \qquad y = y_0 + b, \qquad z = z_0 + c.$$

a, b, c sont, à l'instant t, les composantes de l'*élongation* du point matériel considéré; ce sont évidemment des fonctions des quatre variables x_0, y_0, z_0, t:

$$(2) \qquad \begin{cases} a = a(x_0, y_0, z_0, t), \\ b = b(x_0, y_0, z_0, t), \\ c = c(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

Ces fonctions et leurs dérivées partielles seront regardées comme infiniment petites.

Cette hypothèse, jointe aux égalités (1), permet d'écrire

$$a(x_0, y_0, z_0, t) = a(x, y, z, t) - \frac{\partial a}{\partial x_0} a - \frac{\partial a}{\partial y_0} b - \frac{\partial a}{\partial z_0} c.$$

Au second membre de cette égalité, les trois derniers termes sont infiniment petits du second ordre; on a donc, en négligeant ces infiniment petits, la première des égalités

$$(3) \qquad \begin{cases} a(x_0, y_0, z_0, t) = a(x, y, z, t), \\ b(x_0, y_0, z_0, t) = b(x, y, z, t), \\ c(x_0, y_0, z_0, t) = c(x, y, z, t). \end{cases}$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Aux infiniment petits du second ordre près, l'élongation, à l'instant t, du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées à cet instant est égale à l'élongation, au même instant, du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées dans l'état d'équilibre.

La vitesse du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées à l'instant t est une grandeur géométrique bien déterminée dont les composantes seront désignées par

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t).$$

On a visiblement

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial a(x_0, y_0, z_0, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial a(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_0 \partial t} a - \frac{\partial^2 a}{\partial y_0 \partial t} b - \frac{\partial^2 a}{\partial z_0 \partial t} c. \end{aligned}$$

En négligeant les infiniment petits du second ordre, cette égalité

devient la première des égalités

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} a(x, y, z, t), \\ v(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} b(x, y, z, t), \\ w(x, y, z, t) &= \frac{\partial}{\partial t} c(x, y, z, t). \end{aligned}\right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Soient $g_x(x, y, z, t)$, $g_y(x, y, z, t)$, $g_z(x, y, z, t)$ les composantes, à l'instant t, de l'accélération du point matériel qui a pour coordonnées x, y, z à cet instant; par un raisonnement analogue à celui qui a fourni les égalités (4), on trouve les égalités

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} g_x(x, y, z, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(x, y, z, t), \\ g_y(x, y, z, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} b(x, y, z, t), \\ g_z(x, y, z, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} c(x, y, z, t). \end{aligned}\right.$$

Si (x, y, z) est un point d'une paroi immobile et si n_i est, en ce point, la normale à la paroi dirigée vers l'intérieur du fluide, on doit avoir

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a(x, y, z, t)\cos(n_i, x) + b(x, y, z, t)\cos(n_i, y) \\ + c(x, y, z, t)\cos(n_i, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons que deux fluides 1 et 2 soient en contact: leur surface de contact occupait la position S_{12} dans l'état d'équilibre; à l'instant t, elle occupe la position Σ_{12}, infiniment voisine de S_{12}. Soit $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ un point de la surface Σ_{12}; soient ν_1, ν_2 les deux demi-normales menées en μ à la surface Σ_{12}, la première vers l'intérieur du fluide 1, la seconde vers l'intérieur du fluide 2. Au point géométrique μ, à l'instant t, se trouvent un point matériel appartenant au fluide 1 et un point matériel appartenant au fluide 2; dans l'état d'équilibre, ces

deux points matériels étaient sur la surface S_{12}, le premier en

$$M_1(x_1, y_1, z_1),$$

le second en

$$M_2(x_2, y_2, z_2);$$

$M_1\mu$ est l'élongation à l'instant t du premier point matériel, ses composantes sont

$$a_1(x_1, y_1, z_1, t), \quad b_1(x_1, y_1, z_1, t), \quad c_1(x_1, y_1, z_1, t);$$

$M_2\mu$ est l'élongation à l'instant t du second point matériel; ses composantes sont

$$a_2(x_2, y_2, z_2, t), \quad b_2(x_2, y_2, z_2, t), \quad c_2(x_2, y_2, z_2, t).$$

Aux infiniment petits du second ordre près, nous aurons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) + b_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, y) \\ & \qquad\qquad + c_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, z) \\ & + a_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, x) + b_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, y) \\ & \qquad\qquad + c_2(x_2, y_2, z_2, t)\cos(\nu_2, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit $M(x, y, z)$ un point de la surface S_{12}; soient n_1, n_2 les deux demi-normales menées par le point M à la surface S_{12}, l'une vers l'intérieur du fluide 1, l'autre vers l'intérieur du fluide 2. Supposons le point M infiniment voisin des points μ, M_1, M_2. Nous aurons

$$\begin{aligned} & a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) \\ & \quad \| \quad a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x) \\ & \quad + a_1(x, y, z, t)[\cos(\nu_1, x) - \cos(n_1, x)] \\ & \quad + \cos(\nu_1, x)\left[\frac{\partial a_1}{\partial x}(x_1 - x) + \frac{\partial a_1}{\partial y}(y_1 - y) + \frac{\partial a_1}{\partial z}(z_1 - z)\right]. \end{aligned}$$

Mais, au second membre de cette égalité, les deux derniers termes sont des infiniment petits du second ordre; en les négligeant, il

vient

$$a_1(x_1, y_1, z_1, t)\cos(\nu_1, x) = a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x).$$

Cette égalité et d'autres analogues transforment l'égalité (7) en

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1(x, y, z, t)\cos(n_1, x) + b_1(x, y, z, t)\cos(n_1, y) \\ & \qquad\qquad + c_1(x, y, z, t)\cos(n_1, z) \\ & + a_2(x, y, z, t)\cos(n_2, x) + b_2(x, y, z, t)\cos(n_2, y) \\ & \qquad\qquad + c_2(x, y, z, t)\cos(n_2, z) = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit être vérifiée à tout instant, en tout point de la surface *fixe* S_{12}.

Soit $\rho_0(x, y, z)$ la densité, au point (x, y, z), du fluide en équilibre; soit $\rho(x, y, z, t)$ la densité au même point et à l'instant t, au sein du fluide en mouvement; $(\rho - \rho_0)$ est une quantité infiniment petite ainsi que ses dérivées partielles.

Dans le fluide en équilibre, traçons une surface fermée S, circonscrivant une certaine masse. A l'instant t, cette masse est circonscrite par une surface Σ, infiniment voisine de la surface S; un point (x, y, z) de la surface S, subissant le déplacement $a(x, y, z, t)$, $b(x, y, z, t)$, $c(x, y, z, t)$, se vient placer sur la surface Σ. Soit n_i la demi-normale à la surface S, menée par le point (x, y, z) et dirigée vers l'intérieur du volume que cette surface enferme; soit ϖ ce volume. En exprimant que la masse contenue dans la surface Σ est identique à la masse contenue dans la surface S et en négligeant des infiniment petits du second ordre, nous trouvons

$$\int_\varpi \rho_0\, d\varpi = \int_\varpi \rho\, d\varpi - \int_S \rho[a\cos(n_i, x) + b\cos(n_i y) + c\cos(n_i, z)]\, dS.$$

Mais $(\rho - \rho_0)$ étant une quantité infiniment petite, on peut encore écrire cette égalité

$$\int_\varpi (\rho - \rho_0)\, d\varpi = \int_S \rho_0[a\cos(n_i, x) + b\cos(n_i, y) + c\cos(n_i, z)]\, dS.$$

Par une méthode connue, on en conclut que l'on a, en tout

point (x, y, z) du volume occupé par le fluide en équilibre, et à tout instant t,

$$(9) \qquad \rho - \rho_0 + \rho_0\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right) + a\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + b\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + c\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0.$$

D'autre part, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre, on a

$$\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \rho_0}{\partial x} a_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} b_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} c_0,$$

en posant

$$a_0 = a(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$b_0 = b(x_0, y_0, z_0, t),$$
$$c_0 = c(x_0, y_0, z_0, t).$$

Si l'on tient compte des égalités (3), l'égalité écrite ci-dessus devient

$$\rho_0(x, y, z) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = a\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + b\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + c\frac{\partial \rho_0}{\partial z}.$$

L'égalité (9) devient alors

$$(10) \qquad \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = -\rho_0(x, y, z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right).$$

Visiblement, elle peut encore s'écrire

$$(10\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) \\ &\quad = -\rho_0(x_0, y_0, z_0)\left(\frac{\partial a_0}{\partial x_0} + \frac{\partial b_0}{\partial y_0} + \frac{\partial c_0}{\partial z_0}\right) \end{aligned}\right.$$

Nous disons que le mouvement admet une *fonction potentielle des élongations* lorsqu'il existe une fonction $\psi(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial x}, \\ b(x, y, z, t) &= \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial y}, \\ c(x, y, z, t) &= \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Nous disons que le mouvement admet une *fonction potentielle des vitesses* lorsqu'il existe une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ telle que l'on ait

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial x},\\ v(x, y, z, t) &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial y},\\ w(x, y, z, t) &= -\frac{\partial\varphi(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

L'existence d'une fonction potentielle des élongations ψ entraîne l'existence d'une fonction potentielle des vitesses $\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial t}$.

La réciproque de cette proposition n'est pas vraie. *Pour que l'existence d'une fonction potentielle des vitesses entraîne l'existence d'une fonction potentielle des élongations,* il faut et il suffit que la quantité

$$a(x, y, z, 0)\,dx + b(x, y, z, 0)\,dy + c(x, y, z, 0)\,dz$$

soit une différentielle totale; en d'autres termes, *il faut et il suffit qu'il existe une fonction potentielle des élongations à l'instant initial du mouvement.*

Lorsqu'il existe une fonction potentielle des élongations, l'égalité (6), vérifiée en tout point d'une paroi immobile, devient

$$(13)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n_i} = 0,$$

tandis que l'égalité (8), vérifiée en tout point de la surface S_{12} qui séparait deux fluides 1 et 2 au moment de l'équilibre, devient

$$(14)\qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial n_2} = 0.$$

§ 2. — Petits mouvements pendulaires d'un corps fluide.

Le petit mouvement étudié sera *pendulaire* si l'élongation est définie par les formules

$$(15)\quad \begin{cases} a(x,y,z,t) = A(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + A'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{T}, \\ b(x,y,z,t) = B(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + B'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{T}, \\ c(x,y,z,t) = C(x,y,z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + C'(x,y,z)\cos 2\pi\frac{t}{T}. \end{cases}$$

Visiblement, ces égalités équivalent aux équations différentielles suivantes :

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}a(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{T^2}a(x,y,z,t) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}b(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{T^2}b(x,y,z,t) = 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}c(x,y,z,t) + \frac{4\pi^2}{T^2}c(x,y,z,t) = 0. \end{cases}$$

Supposons qu'un tel mouvement admette une fonction potentielle des vitesses $\varphi(x,y,z,t)$; nous aurons, quel que soit t, l'égalité

$$\frac{2\pi}{T}\left(A\cos 2\pi\frac{t}{T} - A'\sin 2\pi\frac{t}{T}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

et deux égalités analogues. Ces égalités étant vraies quel que soit t, il en est de même de l'égalité

$$\frac{4\pi^2}{T^2}\left(A\sin 2\pi\frac{t}{T} + A'\cos 2\pi\frac{t}{T}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}$$

et des deux égalités analogues que l'on obtient en les différentiant par rapport à t. Mais si l'on pose

$$\psi(x,y,z,t) = -\frac{T^2}{4\pi^2}\frac{\partial\varphi(x,y,z,t)}{\partial t},$$

les égalités précédentes donnent l'égalité

$$(17) \qquad A \sin 2\pi \frac{t}{T} + A' \cos 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

et deux analogues. Celles-ci expriment que le mouvement défini par les égalités (15) admet une fonction potentielle des élongations. Ainsi, *pour qu'un petit mouvement pendulaire admette une fonction potentielle des vitesses, il faut et il suffit qu'il admette une fonction potentielle des élongations.*

Admettons donc l'existence d'une fonction potentielle des élongations; l'égalité (17) sera vérifiée quel que soit t, et il en sera de même de l'égalité

$$A \cos 2\pi \frac{t}{T} - A' \sin 2\pi \frac{t}{T} = -\frac{T}{2\pi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial t}$$

que l'on en tire par différentiation.

Ces deux égalités donnent

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} A(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(x, y, z, t) \sin 2\pi \frac{t}{T} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \cos 2\pi \frac{t}{T}\right], \\ A'(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\psi(x, y, z, t) \cos 2\pi \frac{t}{T} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \sin 2\pi \frac{t}{T}\right]. \end{aligned} \right.$$

Les deux égalités (18) et les quatre égalités analogues en B, B', C, C' nous enseignent que les dérivées partielles par rapport à x, y, z des deux expressions

$$\psi(x, y, z, t) \sin 2\pi \frac{t}{T} + \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\psi(x, y, z, t) \cos 2\pi \frac{t}{T} - \frac{T}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

sont indépendantes de t. Il en résulte que l'on a

$$(19)\quad \begin{cases} \psi(x, y, z, t)\sin 2\pi\frac{t}{T} \\ \quad + \frac{T}{2\pi}\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t}\cos 2\pi\frac{t}{T} = \Psi(x, y, z) + F(t), \\ \psi(x, y, z, t)\cos 2\pi\frac{t}{T} \\ \quad - \frac{T}{2\pi}\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t}\sin 2\pi\frac{t}{T} = \Psi'(x, y, z) + F'(t). \end{cases}$$

Les égalités (18) deviennent alors

$$(20)\quad \begin{cases} A = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \\ A' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial x}, \quad B' = -\frac{\partial\Psi'}{\partial y}, \quad C' = \frac{\partial\Psi'}{\partial z}, \end{cases}$$

tandis que les égalités (19) donnent

$$(21)\quad \psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T} - f(t),$$

en posant

$$f(t) = F(t)\sin 2\pi\frac{t}{T} + F'(t)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Réciproquement, s'il existe deux fonctions $\Psi(x, y, z)$ et $\Psi'(x, y, z)$ telles que les égalités (20) soient vérifiées, l'égalité (21), où $f(t)$ désigne une fonction arbitraire de t, fournira une fonction potentielle des élongations. *Les égalités* (20) *représentent donc les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction potentielle des élongations en un mouvement pendulaire.*

Supposons désormais ces conditions remplies.

L'élongation à l'instant t du point matériel dont x, y, z sont les coordonnées au sein du fluide en équilibre est la résultante de deux vec-

teurs; le premier a pour composantes

$$\alpha = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\beta = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\gamma = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi(x, y, z)\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Le second a pour composantes

$$\alpha' = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\beta' = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T},$$

$$\gamma' = -\frac{\partial}{\partial z}\Psi'(x, y, z)\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

Chaque point matériel décrit autour de la position (x, y, z) *qu'il occupait dans l'état d'équilibre une trajectoire plane dont le plan est normal à l'intersection des deux surfaces*

$$\Psi(x, y, z) = \text{const.},$$
$$\Psi'(x, y, z) = \text{const.},$$

qui se coupent en ce point (x, y, z).

Cette trajectoire est une ellipse dont le point (x, y, z) *occupe le centre.*

Les normales N, N′ *à ces deux surfaces, menées par le point* (x, y, z), *marquent les directions de deux diamètres conjugués* D, D′ *de cette ellipse.*

Si nous traçons une suite de surfaces $\Psi(x, y, z) = \lambda$ *en faisant croître les valeurs du paramètre* λ *selon une progression arithmétique de raison infiniment petite* ε; *si nous traçons de même une suite de surfaces* $\Psi'(x, y, z) = \lambda'$ *en faisant varier le paramètre* λ' *suivant la même loi que le paramètre* λ; *la longueur du diamètre* D

sera, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance normale de deux surfaces Ψ *consécutives; la longueur du diamètre* D' *sera inversement proportionnelle à la distance normale de deux surfaces* Ψ' *consécutives.*

Les égalités (13) et (21) montrent que l'on doit avoir, en tout point d'une surface immobile limitant le fluide,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n_i}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial\Psi'}{\partial n_i}\cos 2\pi\frac{t}{T} = 0.$$

Cette égalité, devant avoir lieu quel que soit t, équivaut aux deux égalités

$$(22)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n_i} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi'}{\partial n_i} = 0.$$

La normale n_i à la paroi est donc tangente à l'intersection des deux surfaces

$$\Psi(x, y, z) = \text{const.}, \qquad \Psi'(x, y, z) = \text{const.},$$

en sorte que *la trajectoire elliptique d'un point matériel infiniment voisin de la paroi immobile est décrite dans un plan parallèle au plan tangent à la paroi.*

On voit de même que l'égalité (14) entraîne ici les égalités

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\Psi'_1}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\Psi'_2}{\partial n_2} = 0. \end{cases}$$

Enfin les égalités (9) et (21) donnent

$$(24)\qquad \begin{cases} \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x, y, z) \\ \quad = \mathrm{R}(x, y, z)\sin 2\pi\dfrac{t}{T} + \mathrm{R}'(x, y, z)\cos 2\pi\dfrac{t}{T} \end{cases}$$

avec

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathrm{R} = \rho_0\Delta\Psi + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial x}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial y}\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial z}\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}, \\[2ex] \mathrm{R}' = \rho_0\Delta\Psi' + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial x}\dfrac{\partial\Psi'}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial y}\dfrac{\partial\Psi'}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho_0}{\partial z}\dfrac{\partial\Psi'}{\partial z}. \end{cases}$$

CHAPITRE III.

ÉTUDE DYNAMIQUE DES PETITS MOUVEMENTS DES FLUIDES

§ 1. — Considérations générales.

Nous continuerons, en ce Chapitre, à n'étudier que les cas particuliers déjà considérés au Chapitre I; dans tous ces cas il existe une fonction $A(x, y, z, t)$ telle que l'on puisse écrire les équations de l'Hydrodynamique sous la forme [Chap. I, égalités (1)]

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial x} + g_x = 0,\\ &\frac{\partial A}{\partial y} + g_y = 0,\\ &\frac{\partial A}{\partial z} + g_z = 0. \end{aligned}\right.$$

Supposons que les élongations des divers points du fluide restent toujours très petites, de telle sorte que l'on puisse leur appliquer les considérations développées au Chapitre précédent, nous aurons [Chap. II, égalités (5)]

$$g_x = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \qquad g_y = \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}, \qquad g_z = \frac{\partial^2 c}{\partial t^2},$$

en sorte que les égalités (1) pourront s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} A(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} a(x, y, z, t) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial y} A(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} b(x, y, z, t) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial z} A(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} c(x, y, z, t) = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenons une fonction $\lambda(x, y, z, t)$ telle que

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \lambda(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \Lambda(x, y, z, t)$$

et choisissons-la de telle sorte que, pour $t = 0$, λ soit nul dans tout le fluide. Les égalités (2) deviennent

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial x} + a(x, y, z, t)\right] = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial y} + b(x, y, z, t)\right] = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial z} + c(x, y, z, t)\right] = 0$$

ou bien

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} a(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial x} + a_0(x, y, z) + a_1(x, y, z)t, \\ b(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial y} + b_0(x, y, z) + b_1(x, y, z)t, \\ c(x, y, z, t) &= -\frac{\partial \lambda(x, y, z, t)}{\partial z} + c_0(x, y, z) + c_1(x, y, z)t. \end{aligned}\right.$$

Pour $t = 0$, λ est nul dans tout l'espace occupé par le fluide; il en est donc de même de $\frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$, en sorte que, pour $t = 0$, on a

$$(5) \qquad a = a_0, \qquad b = b_0, \qquad c = c_0.$$

Ces égalités nous enseignent que a_0, b_0, c_0 sont infiniment petits comme a, b, c.

Les égalités (4) permettent d'écrire

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y} - \left(\frac{\partial b_0}{\partial z} - \frac{\partial c_0}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial c_1}{\partial y}\right)t, \\ \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z} - \left(\frac{\partial c_0}{\partial x} - \frac{\partial a_0}{\partial z}\right) &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z}\right)t, \\ \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} - \left(\frac{\partial a_0}{\partial y} - \frac{\partial b_0}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial x}\right)t. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont infiniment petits quel que soit t; les seconds ne peuvent l'être que si l'on a

$$\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial c_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial c_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial b_1}{\partial x} = 0.$$

En vertu de ces dernières égalités, il existe une fonction $\mu(x, y, z)$ telle que l'on puisse écrire

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial x}\mu(x, y, z), \\ b_1(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial y}\mu(x, y, z), \\ c_1(x, y, z) &= -\frac{\partial}{\partial z}\mu(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Si nous tenons compte des égalités (4) et (7) et si nous posons

$$\psi(x, y, z, t) = \lambda(x, y, z, t) + \mu(x, y, z)t,$$

nous pourrons écrire

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} a(x, y, z, t) &= a_0(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, y, z, t), \\ b(x, y, z, t) &= b_0(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y}\psi(x, y, z, t), \\ c(x, y, z, t) &= c_0(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z}\psi(x, y, z, t). \end{aligned} \right.$$

Ces égalités justifient immédiatement la proposition suivante :

Le mouvement infiniment petit le plus général d'un fluide au sein duquel existe une fonction λ est un mouvement qui admet une fonction potentielle des élongations, pourvu que l'élongation de chaque point matériel soit comptée à partir de la position (a_0, b_0, c_0) qu'occupe ce point à l'instant $t = 0$.

Cette proposition équivaut visiblement à la suivante :

Le mouvement infiniment petit le plus général d'un fluide au

sein duquel existe une fonction Λ est un mouvement qui admet une fonction potentielle des vitesses.

Pour pousser plus loin, nous devrons traiter séparément les divers cas que nous avons déjà distingués au Chapitre I.

§ 2. — Équations des petits mouvements pour un fluide homogène et incompressible.

Un fluide homogène et incompressible a une densité invariable ρ.

En un fluide quelconque, un point matériel qui, dans l'état d'équilibre, se trouve au point (x_0, y_0, z_0) avec la densité $\rho_0(x_0, y_0, z_0)$, est, à l'instant t, en un point (x, y, z) où il a la densité $\rho(x, y, z, t)$, et l'on a [Chap. II, égalité (10)]

$$(9)\qquad \rho(x, y, z, t) - \rho_0(x_0, y_0, z_0) = \rho_0(x, y, z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right).$$

Dans le cas actuel, $\rho(x, y, z, t)$ est nécessairement égal à

$$\rho_0(x_0, y_0, z_0),$$

en sorte que l'on a

$$(10)\qquad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Cette égalité, vérifiée quel que soit t, est vraie, en particulier pour $t = 0$, en sorte que l'on doit avoir, en tout point (x, y, z) du fluide,

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial x} a_0(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} b_0(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} c_0(x, y, z) = 0.$$

Les égalités (8), (10) et (11) montrent alors que l'on a, en tout point (x, y, z) du fluide et à tout instant,

$$(12)\qquad \Delta\frac{1}{\rho}(x, y, z, t) = 0.$$

Pour que la fonction Λ existe il faut et il suffit que la fonction

potentielle des forces extérieures qui sollicitent les divers éléments de masse du fluide soit, à chaque instant t, une fonction uniforme de x, y, z. Nous admettrons que cette fonction potentielle est la somme de deux autres :

1° Une fonction $V(x, y, z)$, indépendante de t; les forces qui dérivent de cette fonction potentielle sont celles qui solliciteraient les divers éléments du fluide en l'état d'équilibre stable au voisinage duquel se fait le petit mouvement considéré;

2° Une fonction $\varphi(x, y, z, t)$, variable avec t; cette fonction potentielle des *forces perturbatrices* est infiniment petite.

Pour un fluide homogène et incompressible, on a [1]

$$(13) \qquad A(x, y, z, t) = \frac{\Pi(x, y, z, t)}{\rho} + V(x, y, z) + \varphi(x, y, z, t),$$

$\Pi(x, y, z, t)$ étant la pression au point (x, y, z) et à l'instant t.

En vertu de cette égalité (13) et des égalités (8), les équations (**1**) deviennent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Elles nous enseignent que la somme

$$\frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

est une simple fonction de t; mais, comme on peut toujours ajouter à ψ une fonction arbitraire de t, nous pourrons choisir ψ de telle sorte que l'on ait, en tout point (x, y, z) et à tout instant t,

$$(14) \qquad \frac{\Pi}{\rho} + V + \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique*, égalité (158) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 373).

Nous allons appliquer cette égalité à un point quelconque de la surface déformable S du fluide et écrire qu'en ce point, H égale la pression extérieure.

Soit M un point de la surface déformable S, prise dans la position qu'elle occupe à l'instant t; soient x, y, z les coordonnées du point M. Le point matériel qui se trouve en M, à l'instant t, se trouvait, dans l'état d'équilibre, en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, sur la surface S_0 qui terminait le fluide en cet état.

Nous avons, par définition (Chap. II, § 1),

$$(15)\qquad \begin{cases} x - x_0 = a(x_0, y_0, z_0, t), \\ y - y_0 = b(x_0, y_0, z_0, t), \\ z - z_0 = c(x_0, y_0, z_0, t). \end{cases}$$

La pression extérieure au point M est la somme de deux termes :

1° Le premier est la pression $P(M_0)$ qui s'exerçait en M_0 à la surface S_0 du fluide en équilibre; selon les lois de l'Hydrostatique, on avait alors

$$(16)\qquad \frac{P(M_0)}{\rho} + V(M_0) = C,$$

C ayant la même valeur en tout point de la surface S_0;

2° Le second, variable avec l'instant t et le point M ou, ce qui revient au même, avec l'instant t et le point M_0, peut être représenté par $p(M_0, t)$; cette *pression perturbatrice* est infiniment petite.

A tout instant, et pour tout point M de la surface S, nous devons avoir

$$H(M, t) = P(M_0) + p(M_0, t)$$

ou bien, selon l'égalité (14),

$$(17)\qquad \frac{P(M_0) + p(M_0, t)}{\rho} + V(M) + \varphi(M, t) = \frac{\partial \varphi(M, t)}{\partial t}.$$

En négligeant les infiniment petits du second ordre, et en tenant

compte des égalités (15), nous pourrons écrire

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} V(M) = V(M_0) &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t) \\ &+ \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t), \\ \vartheta(M) = \vartheta(M_0). \end{aligned}\right.$$

Si ϖ est la pression en un point quelconque du fluide en équilibre, on a

$$\frac{\varpi}{\rho} + V = C.$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (14), nous donne

$$(19)\qquad \frac{\Pi - \varpi}{\rho} + \vartheta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - C.$$

Le mouvement étant infiniment petit, la différence de pression $(\Pi - \varpi)$ doit être infiniment petite; le premier membre de l'égalité (19) étant infiniment petit, il en doit être de même du second et, partant, des quantités

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},\quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Dès lors, en négligeant les infiniment petits du second ordre, on a

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}.$$

Si l'on tient compte des égalités (16), (18) et (20), l'égalité (17) devient

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{p(M_0, t)}{\rho} + \vartheta(M_0, t) - \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} + C \\ + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} a(x_0, y_0, z_0, t) \\ + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(x_0, y_0, z_0, t) \\ + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} c(x_0, y_0, z_0, t) \qquad = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité a lieu quelle que soit la position du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur la surface S_0 et quel que soit t.

Faisons-y, tout d'abord, $t = 0$. Désignons par $p_0(M_0)$, $\psi_0(M_0)$ les valeurs que prennent $p(M_0, t)$, $\psi(M_0, t)$ pour $t = 0$. Nous trouverons que l'on a, quelle que soit la position du point M_0 sur la surface S_0,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{p_0(M_0)}{\rho} + \psi_0(M_0) - \left[\frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} a_0(M_0) + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} b(M_0) + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} c(M_0) + C = 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous tenons compte maintenant des égalités (8), nous trouvons que les égalités (21) et (22) exigent que l'on ait, quelle que soit la position du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ sur la surface S_0 et quel que soit l'instant t,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{p(M_0, t) - p_0(M_0)}{\rho} + \psi(M_0, t) - \psi(M_0) \\ &\quad = \frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2} - \left[\frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0 \\ &\quad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial x_0} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial y_0} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0}\frac{\partial\psi(M_0, t)}{\partial z_0}. \end{aligned}\right.$$

On voit maintenant comment se traitera le problème des petits mouvements d'un fluide incompressible, homogène, soumis à des actions perturbatrices connues.

Les fonctions $\psi(M, t)$, $p(M_0, t)$ étant connues, on pourra prendre arbitrairement les trois composantes de l'élongation initiale

$$a_0(x, y, z), \quad b_0(x, y, z), \quad c_0(x, y, z),$$

liées par l'égalité (11); l'égalité (22) fera alors connaître

$$\left[\frac{\partial^2\psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right]_0.$$

Pour déterminer $\psi(x, y, z, t)$, on aura l'équation (12) vérifiée en tout point du fluide, et l'équation (23) vérifiée en tout point de la sur-

face S_0. Cette dernière pourra s'écrire abréviativement

$$(23\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\psi(M_0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial x_0} \\ &\qquad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial y_0} \\ &\qquad + \frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial z_0} = F(M_0,t), \end{aligned}\right.$$

F étant une fonction connue. En outre, il faudra se donner la valeur initiale de $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

Cette égalité prend une forme remarquable dans le cas où la pression $P(M_0)$, qui maintenait le fluide en équilibre, a même valeur en tout point de la surface S_0; dans ce cas, $V(M_0)$ a aussi même valeur en tout point de la surface S_0; si n est la demi-normale à la surface S_0 vers l'intérieur du fluide, si α, β, γ sont les cosinus des angles que cette direction fait avec les axes de coordonnées, on a

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\alpha,$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial y_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\beta,$$

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial z_0} = \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\gamma,$$

$$\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial y}\beta + \frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial z}\gamma = \frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial n}$$

et l'égalité (23 *bis*) devient

$$(24)\qquad \frac{\partial^2\psi(M_0,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n}\frac{\partial\psi(M_0,t)}{\partial n} = F(M_0,t).$$

Il est un cas particulier que nous aurons à considérer de suite; c'est celui où aucune action perturbatrice ne sollicite le fluide

$$\varphi(M,t) = 0, \qquad p(M_0,t) = 0$$

et où les élongations initiales sont toutes nulles

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = 0.$$

L'égalité (22) nous donne alors

$$\left(\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2}\right)_0 = C,$$

égalité d'où nous tirons

$$F(M_0, t) = C,$$

et qui transforme l'égalité (24) en

$$\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n} \frac{\partial \psi(M_0, t)}{\partial n} = 0.$$

Si, à la fonction $\psi(M, t)$, je substitue la somme $[\psi(M, t) - Ct^2]$, et si je désigne maintenant cette somme par $\psi(M, t)$, les équations (8) et (12) demeureront inaltérées, tandis que l'équation précédente deviendra

$$\frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V(M_0)}{\partial n} \frac{\partial \psi(M_0, t)}{\partial n} = 0. \tag{25}$$

§ 3. — Équations des petits mouvements au sein d'un fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions newtoniennes ou non newtoniennes.

Un point matériel occupait, dans la position d'équilibre, une position (x_0, y_0, z_0) avec la densité $\rho_0(x_0, y_0, z_0)$; à l'instant t, il occupe la position (x, y, z) avec la densité $\rho(x, y, z, t)$. On peut écrire

$$\rho(x, y, z, t) - \rho(x_0, y_0, z_0) = -\rho_0(x, y, z)\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right). \tag{9}$$

Mais

$$\begin{aligned}\rho_0(x_0, y_0, z_0) = \rho_0(x, y, z) &- \frac{\partial \rho_0(x, y, z)}{\partial x} a(x, y, z, t) \\ &- \frac{\partial \rho_0(x, y, z)}{\partial y} b(x, y, z, t) \\ &- \frac{\partial \rho_0(x, y, z)}{\partial z} c(x, y, z, t).\end{aligned}$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$\rho(t) - \rho_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c). \tag{26}$$

les quantités ρ_0, a, b, c, $\rho(t)$ se rapportant toutes au même point (x, y, z).

L'égalité (26) peut s'appliquer, en particulier, à l'instant $t = 0$; elle donne alors

$$(27) \qquad \rho(0) - \rho_0 = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0).$$

Les égalités (8), (26) et (27) donnent alors

$$(28) \qquad \rho(t) - \rho(0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right).$$

Le système était primitivement en équilibre sous l'influence d'actions newtoniennes ou non newtoniennes extérieures, appliquées à ses éléments de masse et dérivant d'une fonction potentielle $U(\rho, x, y, z)$, et d'une pression $P(M_0)$ appliquée en chaque point de sa surface déformable S_0.

Posons, pour abréger,

$$U_0 = U(\rho_0), \qquad \zeta_0 = \zeta(\rho_0).$$

Il existe une quantité C, indépendante de x, y, z, telle que l'on ait, dans toute la masse fluide,

$$(29) \qquad U_0 + \rho_0 \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0} + \zeta_0 + \rho_0 \frac{d\zeta_0}{d\rho_0} = C.$$

La pression Π_0 en un point quelconque du fluide en équilibre est donnée par la relation

$$(30) \qquad \Pi_0 = \rho_0^2 \left(\frac{d\zeta_0}{d\rho_0} + \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0}\right).$$

On a donc, en tout point M_0 de la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre,

$$(31) \qquad P(M_0) = \rho_0^2 \left(\frac{d\zeta_0}{d\rho_0} + \frac{\partial U_0}{\partial \rho_0}\right),$$

toutes les quantités qui figurent au second membre ayant les valeurs qui conviennent au point M_0.

Durant le mouvement du système, chacun des éléments de masse sera soumis non seulement aux actions qui dérivent de la fonction potentielle $U(\rho, x, y, z)$, mais encore à des *actions perturbatrices* newtoniennes ou non newtoniennes dont la fonction potentielle sera $v(\rho, x, z, t)$; cette fonction sera sans cesse infiniment petite; au point M de la surface S, la pression s'obtiendra en ajoutant, comme dans le cas précédent, à la pression $P(M_0)$, une *pression perturbatrice* infiniment petite

$$p(M_0, t).$$

Dans ces conditions, pendant toute la durée du mouvement, il existera une fonction $A(x, y, z, t)$ donnée par l'égalité [1]

$$(32)\quad A = U(\rho) + \rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial\rho} + v(\rho, t) + \rho\frac{\partial v(\rho, t)}{\partial\rho} + \zeta(\rho) + \rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}.$$

Les égalités (2) et (8) du présent Chapitre nous donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Nous voyons ainsi que $\left(A - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$ est une simple fonction de t; mais on peut toujours ajouter à ψ une fonction arbitraire de t; il est clair que l'on peut choisir cette fonction de telle sorte que $\left(A - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$ soit

---

(1) *Recherches sur l'Hydrodynamique*, 1re Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique*, égalité (159) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 374).

nul, ce qui, en vertu de l'égalité (32), donne

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &U(\rho)+\rho\frac{\partial U(\rho)}{\partial\rho}+v(\rho,t)+\rho\frac{\partial v(\rho,t)}{\partial\rho}\\ &\qquad\qquad+\zeta(\rho)+\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Cette égalité est vraie quel que soit t. Écrivons-la pour $t=0$. Désignons par $\zeta(0)$, $U(0)$, $v(0)$, ce que deviennent $\zeta(\rho)$, $U(\rho)$, $v(\rho,t)$ lorsqu'on y fait $\rho=\rho(0)$ et $t=0$. Nous trouverons l'égalité

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &U(0)+\rho(0)\frac{\partial U(0)}{\partial\rho(0)}+v(0)+\rho(0)\frac{\partial v(0)}{\partial\rho(0)}\\ &\qquad\qquad+\zeta(0)+\rho(0)\frac{d\zeta(0)}{d\rho(0)}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0=0.\end{aligned}\right.$$

Retranchons membre à membre cette égalité de l'égalité (33) et remarquons :

1° Que les trois quantités ρ_0, $\rho(0)$, $\rho(t)$ diffèrent infiniment peu;

2° Que v et ses dérivées partielles sont des quantités infiniment petites.

Si nous posons alors [Chap. I, égalité (16)]

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} J(\rho,x,y,z)=\;&2\rho\frac{d\zeta(\rho)}{d\rho}+\rho^2\frac{d^2\zeta(\rho)}{d\rho^2}\\ &+2\rho\frac{\partial U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho}+\rho^2\frac{\partial^2 U(\rho,x,y,z)}{\partial\rho^2},\end{aligned}\right.$$

nous aurons

$$(36)\qquad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(t)-\rho(0)]=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Comparée à l'égalité (28), cette égalité devient

$$(37)\quad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]=\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Par une transformation analogue, l'égalité (34) devient

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(0)-\rho_0]+v(\rho_0,0)+\rho_0\frac{\partial v(\rho_0,0)}{\partial\rho_0}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0=0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (27),

$$(34\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\upsilon(\rho_0, 0) + \rho_0 \frac{\partial \upsilon(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} \\ &- \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0)\right] - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

En tout point du fluide, à tout instant, la pression Π a pour valeur

$$\Pi = \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left[U(\rho) + \upsilon(\rho, t) + \zeta(\rho)\right].$$

Appliquée à un point M de la surface déformable, cette égalité donne, quel que soit t,

$$P(M_0) + p(M_0, t) = \left\{\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho}\left[U(\rho) + \upsilon(\rho, t) + \zeta(\rho)\right]\right\}_M.$$

Le segment M_0M a pour composantes a, b, c, qui sont des quantités infiniment petites; il en est de même de la différence

$$[\rho(M_0, t) - \rho_0(M_0)];$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned} \rho(M, t) = \rho_0(M_0) &+ [\rho(M_0, t) - \rho_0(M_0)] \\ &+ \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial x} a + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} b + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} c\right]_M. \end{aligned}$$

Alors, si nous tenons compte des égalités (31) et (37), si nous observons en outre que υ et ses dérivées sont des quantités infiniment petites, nous trouvons

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} p(M_0, t) = &\ \rho_0^2 \frac{\partial \upsilon(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} + J(\rho_0)\left[\rho(t) - \rho_0\right] \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial x}\right] a \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial y}\right] b \\ &+ \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0\, \partial z}\right] c. \end{aligned}\right.$$

Au second membre, toutes les variables ont les valeurs qui conviennent au point M_0.

Appliquons d'abord cette égalité à l'instant $t = 0$; elle nous donne

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} p(M_0, 0) - \rho_0^2 \frac{\partial \mathcal{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} = {} & J(\rho_0)[\rho(0) - \rho_0] \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial x}\right] a_0 \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial y}\right] b_0 \\ & + \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial z}\right] c_0. \end{aligned}\right.$$

Maintenant, retranchons membre à membre les égalités (38) et (39), en tenant compte des égalités (8) et (36); nous trouvons que l'on doit avoir, en tout point M_0 de la surface S et à tout instant t,

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} & p(M_0, t) - p(M_0, 0) - \rho_0^2 \left[\frac{\partial \mathcal{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \mathcal{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}\right] \\ & \quad = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right] - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial x}\right] \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ & \qquad - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial y}\right] \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ & \qquad - \left[J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \rho_0 \partial z}\right] \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ et $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$ ont les valeurs qui conviennent au point M, et non les valeurs qui conviennent au point M_0.

Mais, si nous retranchons membre à membre l'égalité (29) de l'égalité (33), nous trouvons que l'on a, en tout point du fluide,

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(t) - \rho_0] + \mathcal{V}(\rho, t) + \rho \frac{\partial \mathcal{V}(\rho, t)}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - C.$$

Le premier membre étant infiniment petit, il en est de même du second et de ses dérivées par rapport à x, y ou z, c'est-à-dire de $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

Mais on a

$$\frac{\partial^2 \psi(M, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(M_0, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 \psi(M_0, t)}{\partial x_0 \partial t^2} a + \frac{\partial^3 \psi(M_0, t)}{\partial y_0 \partial t^2} b + \frac{\partial^3 \psi(M_0, t)}{\partial z_0 \partial t} c.$$

Si donc, dans l'égalité (40), nous supposons que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$ se rapportent non plus au point M, mais au point M_0, nous négligeons seulement des infiniment petits du second ordre.

Cette formule (40) peut encore s'écrire sous une forme un peu différente.

L'égalité (30), vraie en tout point du fluide, nous permet d'écrire

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_0 \partial x},$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_0 \partial y},$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = J(\rho_0)\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_0 \partial z}.$$

L'égalité (40) peut alors s'écrire

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} & p(M_0, t) - p(M_0, 0) - \rho_0^2\left[\frac{\partial v(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \frac{\partial v(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}\right] \\ & = \rho_0\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right] - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Lorsqu'on se donne les actions perturbatrices et les valeurs initiales a_0, b_0, c_0, de l'élongation, l'égalité (27) fait connaître $\rho(0)$; l'égalité (34) ou (34 *bis*) détermine alors la valeur de $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$; ces résultats préliminaires obtenus, ψ dépend de l'équation indéfinie (37) et de la condition aux limites (40) ou (41) auxquelles on doit joindre la valeur initiale de $\frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Supposons, par exemple, qu'il n'y ait pas d'actions perturbatrices :

$$v(\rho, t) = 0, \qquad p(M_0, t) = 0,$$

et que les composantes initiales de l'élongation soient nulles :

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = 0.$$

L'égalité (27) donne

$$\rho(0) = \rho_0,$$

tandis que les égalités (29) et (34) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = C.$$

Les égalités (37) et (41) deviennent alors

$$\frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -C,$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} = \rho_0 C.$$

Mais, à la fonction ψ, on peut toujours substituer la fonction $(\psi - Ct^2)$, sans rien changer aux égalités (8); si l'on désigne encore cette fonction par ψ, l'équation indéfinie deviendra

$$(42) \qquad \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

tandis que la condition aux limites deviendra

$$(43) \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

La condition aux limites prend une forme plus simple lorsque la valeur $P(M_0)$ qu'acquiert, sur la surface S_0, la pression Π_0 est la même en tous les points M_0 de cette surface; on a alors

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\alpha, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\beta, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\gamma.$$

L'égalité (41) devient

$$(44) \qquad \left\{\begin{aligned} & p(M_0, t) - p(M_0, 0) - \rho_0^2\left[\frac{\partial \mathcal{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \frac{\partial \mathcal{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}\right] \\ & \quad = \rho_0\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0\right] - \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n}, \end{aligned}\right.$$

tandis que l'égalité (44) prend la forme

$$(45)\qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

On verra sans peine quelles simplifications comportent les équations précédentes lorsque les actions sont newtoniennes, c'est-à-dire lorsque les fonctions U, v ne dépendent plus de ρ.

§ 4. — Équations des petits mouvements au sein d'un fluide entropique.

L'état d'équilibre initial d'un fluide entropique est un état où il a, en tout point, même densité ρ_0 et même température T_0; cela suppose que, en cet état, le fluide ne subisse pas d'autre action extérieure que celle d'une pression normale et uniforme $P(M_0)$ appliquée à sa surface déformable S_0. Toute modification à partir de cet état est assujettie à la relation, vérifiée en chaque point,

$$(46)\qquad \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = -E s(T).$$

Les relations (27) et (28) sont encore valables ici; mais comme ρ_0 est indépendant de x, y, z, elles deviennent

$$(47)\qquad \rho(0) - \rho_0 = -\rho_0\left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z}\right),$$

$$(48)\qquad \rho(t) - \rho(0) = \rho_0 \Delta\psi.$$

Les égalités (2) et (8) du présent Chapitre donneront encore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(A - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(A - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = 0$$

et, en raisonnant comme dans les deux cas précédents, nous pourrons derechef en conclure que l'on a

$$A - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Mais si l'on pose

$$(49) \qquad s(\mathrm{T}) = \int s(\mathrm{T})\, d\mathrm{T},$$

on aura, dans le cas actuel [1],

$$(50) \quad \Lambda = \upsilon(\rho, t) + \rho \frac{\partial \upsilon(\rho, t)}{\partial \rho} + \zeta(\rho, t) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} + \mathrm{E}s(\mathrm{T}).$$

$\upsilon(\rho, t)$ est encore la grandeur infiniment petite qui sert de fonction potentielle aux actions perturbatrices, supposées non newtoniennes. Nous avons donc

$$(51) \quad \upsilon(\rho, t) + \rho \frac{\partial \upsilon(\rho, t)}{\partial \rho} + \zeta(\rho, \mathrm{T}) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} + \mathrm{E}s(\mathrm{T}) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Appliquons d'abord cette égalité à l'instant $t = 0$: à cet instant, ρ a la valeur $\rho(0)$, infiniment voisine de ρ_0, T a la valeur $\mathrm{T}(0)$, infiniment voisine de T_0. On aura donc

$$\begin{aligned}
&\zeta(\rho, \mathrm{T}) + \rho \frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} + \mathrm{E}s(\mathrm{T}) \\
&\quad = \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0) + \rho_0 \frac{\partial \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \rho_0} + \mathrm{E}s(\mathrm{T}_0) \\
&\qquad + \left[2\zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0) + \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \rho_0^2} \right] [\rho(0) - \rho_0] \\
&\qquad + \left[\frac{\partial \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \mathrm{T}_0} + \mathrm{E} \frac{ds(\mathrm{T}_0)}{d\mathrm{T}_0} + \rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \rho_0 \partial \mathrm{T}_0} \right] [\mathrm{T}(0) - \mathrm{T}_0].
\end{aligned}$$

Mais les égalités (46) et (49) donnent

$$\frac{\partial \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \mathrm{T}_0} + \mathrm{E} \frac{ds(\mathrm{T}_0)}{d\mathrm{T}_0} = 0,$$

tandis que la première de ces égalités donne

$$\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \rho_0 \partial \mathrm{T}_0} [\rho(0) - \rho_0] + \left[\frac{\partial^2 \zeta(\rho_0, \mathrm{T}_0)}{\partial \mathrm{T}_0^2} + \mathrm{E} \frac{ds(\mathrm{T}_0)}{d\mathrm{T}_0} \right] [\mathrm{T}(0) - \mathrm{T}_0] = 0.$$

---

[1] *Recherches sur l'Hydrodynamique*, première Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique*, égalité (161) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. III, 1901, p. 374).

Si donc on pose [Chap. I, égalité (24)]

$$(52)\quad J(\rho, T) = 2\rho\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho^2} - \frac{\rho^2\left[\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\right]^2}{\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2} + E\frac{ds(T)}{dT}},$$

on pourra écrire, à l'instant $t = 0$,

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\zeta(\rho, T) + \rho\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + Es(T)\\ &\quad = \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0\frac{\partial\zeta(\rho_0, T_0)}{\partial\rho_0} + Es(T_0) + \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}[\rho(0) - \rho_0].\end{aligned}\right.$$

En négligeant de même les infiniment petits du second ordre, on pourra écrire

$$(54)\qquad v(\rho, 0) + \rho\frac{\partial v(\rho, 0)}{\partial\rho} = v(\rho_0, 0) + \rho_0\frac{\partial v(\rho_0, 0)}{\partial\rho_0}.$$

En vertu des égalités (53) et (54), l'égalité (51) deviendra

$$\begin{aligned} v(\rho_0, 0) + \rho_0\frac{\partial v(\rho_0, 0)}{\partial\rho_0} + \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0\frac{\partial\zeta(\rho_0, T_0)}{\partial\rho_0}&\\ + \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0}[\rho(0) - \rho_0] &= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0\end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (47),

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} &v(\rho_0, 0) + \rho_0\frac{\partial v(\rho_0, 0)}{\partial\rho_0} + \zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0\frac{\partial\zeta(\rho_0, T_0)}{\partial\rho_0}\\ &\qquad - J(\rho_0, T_0)\left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.\end{aligned}\right.$$

Appliquons maintenant successivement l'égalité (51) à l'instant 0, puis à l'instant t, et retranchons membre à membre les résultats obtenus. Un raisonnement analogue à celui qui a donné l'égalité (53) nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned} &\zeta(\rho, t) + \rho\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial\rho} + Es(T)\\ &\quad - \zeta[\rho(0), T(0)] - \rho(0)\frac{\partial\zeta[\rho(0), T(0)]}{\partial\rho(0)} - Es[T(0)]\\ &\quad = \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0}[\rho(t) - \rho(0)].\end{aligned}$$

$\mathfrak{v}$ et ses dérivées partielles étant infiniment petites, nous pourrons écrire

$$\mathfrak{v}(\rho, t) + \rho \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho, t)}{\partial \rho} - \mathfrak{v}[\rho(0), 0] - \rho(0) \frac{\partial \mathfrak{v}[\rho(0), 0]}{\partial \rho(0)}$$
$$= \mathfrak{v}(\rho_0, t) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \mathfrak{v}(\rho_0, 0) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}.$$

Nous trouvons donc l'égalité

$$\mathfrak{v}(\rho_0, t) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \mathfrak{v}(\rho_0, 0) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}$$
$$+ \frac{J(\rho_0, T_0)}{\rho_0} [\rho(t) - \rho(0)] = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (48),

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} J(\rho_0, T_0) \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mathfrak{v}(\rho_0, 0) + \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} \\ &\quad - \mathfrak{v}(\rho_0, t) - \rho_0 \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0. \end{aligned} \right.$$

Dans l'état d'équilibre, la pression uniforme P est donnée par l'égalité

$$(57) \qquad P = \rho_0^2 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0}.$$

Pendant le mouvement, la pression H en chaque point a pour valeur

$$H = \rho^2 \left[\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho, t)}{\partial \rho}\right],$$

en sorte qu'en chaque point M de la surface déformable S et à chaque instant, on a

$$(58) \qquad P + p(M_0, t) = \rho^2 \left[\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{v}(\rho, t)}{\partial \rho}\right],$$

les quantités qui figurent au second membre ayant les valeurs qui conviennent au point M.

A cause de l'uniformité de ρ_0, de T_0, et à cause de l'égalité (57), on

voit sans peine que cette égalité (58) peut s'écrire

$$p(M_0, t) - \rho_0^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} \right]_{M_0} = J(\rho_0, T_0) [\rho(M_0, t) - \rho_0]$$

ou bien, en vertu de l'égalité (48),

$$(59) \qquad p(M_0, t) - \rho_0^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, t)}{\partial \rho_0} \right]_{M_0} = \rho_0 J(\rho_0, T_0) \Delta \psi(M_0, t).$$

Si l'on compare cette égalité à l'égalité (56), on obtient la nouvelle égalité, vérifiée en tout point M_0 de la surface S_0,

$$p(t) + \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, t) - \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, 0) - \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0} = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_0 \right].$$

Appliquée à l'instant $t = 0$, cette formule donne

$$p(0) = \rho_0^2 \frac{\partial \mathfrak{V}(\rho_0, 0)}{\partial \rho_0}.$$

Elle peut alors se transformer en

$$(60) \quad p(t) - p(0) + \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, t) - \rho_0 \mathfrak{V}(\rho_0, 0) = \rho_0 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_0 \right].$$

Lorsqu'on se donne les actions perturbatrices et les valeurs initiales a_0, b_0, c_0 des composantes de l'élongation, l'égalité (55) détermine

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_0.$$

La fonction ψ est ensuite déterminée par l'équation indéfinie (56) et par la condition aux limites (60) auxquelles il faut joindre la valeur initiale de $\frac{\partial \psi}{\partial t}$.

Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas d'actions perturbatrices

$$\mathfrak{V}(\rho, t) = 0, \qquad p(M_0, t) = 0$$

et que les composantes initiales de l'élongation soient partout nulles

$$a_0 = 0, \qquad b_0 = 0, \qquad c_0 = 0.$$

L'égalité (55) montre alors que $\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0$ a pour valeur

$$\zeta(\rho_0, T_0) + \rho_0 \frac{\partial \zeta(\rho_0, T_0)}{\partial \rho_0},$$

et cette valeur est la même en tous les points du fluide; si nous la désignons par C, nous pourrons substituer à la fonction ψ l'expression $\psi - Ct^2$, que nous désignerons encore par ψ; nous aurons alors

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

L'équation indéfinie (56) deviendra

$$(61) \qquad H(\rho_0, T_0)\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

tandis que la condition aux limites (60) deviendra

$$(62) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

CHAPITRE IV.

CONDITIONS QUI SONT NÉCESSAIRES POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLUIDE [1].

---

§ 1. — Cas du fluide incompressible.

M. Liapounoff [2] et M. Hadamard [3] sont parvenus à préciser les conditions qui sont nécessaires pour la stabilité de l'équilibre d'un

---

[1] *Des conditions nécessaires pour qu'un fluide soit en équilibre stable* (*Comptes rendus*, t. CXXXV, 29 décembre 1902, p. 1290).

[2] Liapounoff, Mémoire publié en russe en 1892 et partiellement reproduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 8.

[3] Hadamard, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, 1897, p. 331.

système défini par un nombre limité de variables. La méthode qu'ils ont suivie peut s'étendre et donner des indications analogues relatives à la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide soumise à des actions extérieures; il convient, dans cette recherche, de se limiter aux cas qui ont été traités dans le Chapitre I, et pour lesquels on connaît des conditions qui suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre.

Le premier de ces cas est ainsi défini :

Le fluide est homogène et incompressible; sa densité est ρ;

Les masses élémentaires qui le composent sont soumises à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle $V(x, y, z)$;

La surface déformable est soumise à une pression uniforme et constante P.

Prenons le fluide dans l'état d'équilibre initial et, à l'instant $t = 0$, dérangeons infiniment peu les divers points matériels qui le composent, en leur imprimant des vitesses infiniment petites. Laissons le fluide se mouvoir sans le soumettre à aucune action perturbatrice. Le point matériel qui, dans l'état d'équilibre, occupait la position M_0, occupe, à l'instant t, la position M; M_0M est l'élongation du point matériel considéré à l'instant t; nous continuerons à représenter ses composantes par $a(M_0, t)$, $b(M_0, t)$, $c(M_0, t)$.

Au cours du présent Chapitre, nous dirons que l'équilibre d'un système est stable si l'on peut limiter supérieurement les valeurs absolues initiales de toutes les élongations et de toutes les vitesses de telle sorte que, dans la suite du temps, aucune élongation ni aucune vitesse ne puisse surpasser, en valeur absolue, certaines limites choisies d'avance, arbitrairement d'ailleurs, et qu'il en soit de même des dérivées premières et secondes de ces quantités par rapport à x, y, z, t.

Ce sens du mot *stable* n'est pas exactement celui qui a été adopté au Chapitre I pour rechercher, selon la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, les conditions qui suffisent à assurer la stabilité; au sens adopté au Chapitre I, le système serait regardé comme stable, bien que certaines élongations ou certaines vitesses dépassassent leurs limites, pourvu que la masse fluide où ces écarts se produisent soit elle-même inférieure à une limite donnée d'avance. En d'autres termes, un système écarté d'un état d'équilibre stable, défini comme

au présent Chapitre, demeure toujours dans un état *voisin* de l'état initial, le mot *voisin* étant pris au *sens habituel;* au contraire, un système écarté de l'état d'équilibre stable défini au Chapitre I ne demeure dans un état *voisin* de l'état initial que si l'on entend le mot *voisin* au *sens nouveau*. Par abréviation, nous pourrons dire que la stabilité considérée en ce Chapitre IV est la *stabilité habituelle*, tandis que la stabilité traitée au Chapitre I est la *stabilité nouvelle*.

Au Chapitre I, nous avons montré que *certaines conditions suffisent à assurer à certains systèmes fluides la stabilité nouvelle;* au présent Chapitre, nous allons prouver que *certaines conditions sont nécessaires pour que certains systèmes fluides possèdent la stabilité habituelle*.

Il est essentiel de ne point oublier cette distinction si l'on veut comparer les résultats que nous allons obtenir au présent Chapitre à ceux qui ont été établis au Chapitre I.

Supposons que le système étudié soit doué de la stabilité habituelle; donnons aux divers points matériels qui le composent des vitesses initiales dépendant d'une fonction potentielle des vitesses, mais sans aucune élongation initiale; nous pourrons imposer à toutes ces vitesses initiales des limites supérieures telles que, quels que soient x, y, z, t, les composantes

$$a(x, y, z, t), \quad b(x, y, z, t), \quad c(x, y, z, t)$$

de l'élongation à l'instant t du point matériel dont les coordonnées, au sein du fluide en équilibre, étaient x, y, z, vérifient les inégalités

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} |a| < A, & |b| < A, & |c| < A, \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}\right| < \xi A, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial t}\right| < \xi' A, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| < \eta A, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial x\,\partial t}\right| < \eta' A, & \ldots, & \\ \left|\dfrac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right| < \zeta A, & \left|\dfrac{\partial^2 b}{\partial t^2}\right| < \zeta A, & \left|\dfrac{\partial^2 c}{\partial t^2}\right| < \zeta A, \end{array}\right.$$

A étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance, et ξ, ξ', η, η', ζ des constantes finies et positives.

D'autre part, ce qui a été dit au paragraphe **2** du Chapitre III montre que l'on peut toujours, si A ne surpasse pas une certaine valeur, écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} a = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \lambda A^2, \\ b = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \mu A^2, \\ c = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \nu A^2, \end{cases}$$

λ, μ, ν étant trois fonctions de x, y, z, t qui ne croissent pas au delà de toute limite, en sorte que l'on puisse trouver une quantité positive F telle que l'on ait

$$(3)\qquad |\lambda| < F, \qquad |\mu| < F, \qquad |\nu| < F$$

et $\psi(x, y, z, t)$ étant une fonction qui vérifie les conditions suivantes:

1° En tout point de la surface déformable S_0 qui limite le fluide en équilibre, on a [Chap. III, égalité (25)]

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0,$$

n étant la demi-normale à la surface S_0 vers l'intérieur du fluide;

2° En tout point de la partie Σ de la paroi immobile que mouille le fluide en équilibre, on a [Chap. II, égalité (13)]

$$(5)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0;$$

3° En tout point du volume ϖ que limitent les surfaces S et Σ, on a [Chap. III, égalité (12)]

$$(6)\qquad \Delta\psi = 0;$$

4° Enfin, à l'instant $t = 0$, on a, en tout point du volume ϖ,

$$(7)\qquad \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

A ce même instant, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ sont nuls en tout point du fluide, tandis que les composantes de la vitesse sont $-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}$.

En disposant des limites supérieures imposées aux vitesses initiales, on peut prendre A assez petit pour que FA soit sûrement inférieur à 1; les inégalités (1) et les égalités (2) nous montrent que nous aurons alors, quels que soient x, y, z, t,

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < A(1+FA), \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < A(1+FA), \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| < A(1+FA).$$

Nous voyons alors que, si le système jouit de la stabilité habituelle, on pourra disposer des limites supérieures imposées aux vitesses initiales, de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| < \Psi,$$

Ψ étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

Considérons alors l'expression

$$(9) \qquad \Omega = \int \frac{\partial V}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)^2 dS_0.$$

Sa valeur absolue ne peut surpasser $\Psi^2 \int \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| dS_0$.

Si donc le système est stable, on pourra imposer à toutes les vitesses initiales une limite supérieure assez petite pour que l'on ait, quel que soit t,

$$(10) \qquad |\Omega| < M,$$

M étant un nombre positif arbitrairement donné d'avance.

L'égalité (9) donne

$$(11) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 2\int \frac{\partial V}{\partial n}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\,dS_0,$$

puis

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int \frac{\partial N}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 + 2\int \frac{\partial N}{\partial n}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t^2}\,dS_0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (4),

$$(12)\qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int \frac{\partial N}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 - 2\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dS_0.$$

Mais l'égalité (6) nous montre que $\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ est nul dans tout le volume ϖ, tandis que, selon l'égalité (5), $\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ est nul en tout point de la surface Σ. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dS_0 = &\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dS_0 + \int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\Sigma\\ &+ \int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\varpi\\ &= -\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi.\end{aligned}$$

L'égalité (12) peut donc s'écrire

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} = &\ 2\int \frac{\partial N}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0\\ &+ 2\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right]d\varpi.\end{aligned}\right.$$

Ces calculs faits, nous allons établir la proposition suivante :

Si $\frac{\partial N}{\partial n}$ n'est négatif en aucun point de la surface S_0 et si les points où cette quantité est positive forment, en cette surface, une aire finie, le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.

En effet, selon les égalités (4) et (7), $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ est nul, à l'instant $t = 0$, en tout point de la surface S_0 ; les égalités (9) et (11) montrent que Ω et $\frac{d\Omega}{dt}$ sont nuls à l'instant $t = 0$.

Selon l'égalité (13) et les propriétés attribuées à $\frac{\partial N}{\partial n}$, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ ne serait jamais négatif. A l'instant $t = 0$, le second terme de $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ serait nul en vertu de l'égalité (7).

D'ailleurs, $\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}$ ne peut être nul en tout point de la surface S_0, à l'instant $t = 0$; en effet, $\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}$ est nul en tout point de la surface Σ, selon l'égalité (5) et, selon l'égalité (6), il en est de même de $\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}$ en tout point du volume ϖ; dès lors, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}$ seraient nuls, à l'instant $t = 0$, en tout point du volume ϖ, et il en serait de même des composantes de la vitesse, ce qui n'est pas.

La valeur initiale de $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$, réduite à son premier terme, est alors positive.

Ω croîtrait donc indéfiniment avec t, contrairement à l'inégalité (10).

Comparons les résultats obtenus au Chapitre I, paragraphe 2, avec ceux que nous venons de trouver :

Un système formé d'un fluide homogène et incompressible, soumis à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle V *et à une pression normale, uniforme et constante, possède certainement la* STABILITÉ NOUVELLE *si* $\frac{\partial N}{\partial n}$ *est négatif en tout point de la surface terminale.*

Si $\frac{\partial N}{\partial n}$ *n'est négatif en aucun point de la surface terminale, et si les points où cette quantité est positive forment une partie finie de la surface terminale, le fluide ne possède certainement pas la* STABILITÉ HABITUELLE.

Ces conclusions, on le voit sans peine, laissent l'une et l'autre échapper certains cas, en sorte que *nous ne possédons pas d'une manière complète les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité soit nouvelle, soit habituelle.*

§ 2. — Cas du fluide homogène, compressible, isothermique, soumis à des actions extérieures newtoniennes ou non newtoniennes.

Par une méthode semblable nous allons traiter d'un fluide homogène, compressible, isothermique, dont les masses élémentaires sont soumises à des forces qui dérivent d'une fonction potentielle $U(\rho, t)$ et dont la surface déformable est soumise à une pression uniforme et constante.

A partir de l'état d'équilibre initial, sans déranger aucun des points matériels qui composent le fluide, donnons-leur des vitesses initiales dépendant d'une fonction potentielle des vitesses. Si le système possède la stabilité habituelle, nous pourrons limiter supérieurement ces vitesses initiales de telle sorte que l'on puisse encore écrire les inégalités

$$(1) \qquad |a| < A, \qquad |b| < A, \qquad |c| < A, \qquad \ldots$$

En outre, si $\rho_0(x, y, z)$ est la densité au point (x, y, z) au sein du fluide en équilibre, si $\rho(x, y, z, t)$ est, à l'instant t, la densité du point matériel qui, au sein du fluide en équilibre, occupait la position (x, y, z), nous voyons par les inégalités (1) que l'on peut limiter ces vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$\left|\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right| < rA,$$

r étant une constante finie.

D'autre part, si l'on se reporte à la théorie des petits mouvements donnée au § 3 du Chapitre précédent, on voit que l'on pourra imposer à A une limite supérieure telle que l'on puisse écrire les égalités et inégalités (2) et (3), la fonction $\psi(x, y, z, t)$ étant assujettie aux conditions suivantes :

1° A tout instant et en tout point de la surface S_0 qui limite le fluide en équilibre, on a [Chapitre III, égalité (15)]

$$(14) \qquad \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial u_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0;$$

2° A tout instant, en tout point de la surface indéformable Σ, on a [Chapitre II, égalité (13)]

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0; \tag{15}$$

3° A tout instant, en tout point de l'espace qu'occuperait le fluide en équilibre, on a [Chapitre III, égalité (42)]

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - J(\rho_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right] = 0; \tag{16}$$

4° A l'instant $t = 0$, en tout point du même espace, on a

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0. \tag{17}$$

A ce même instant, $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ sont nuls en tout point du volume ϖ, tandis que $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t}, -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t}$ sont respectivement égaux aux composantes de la vitesse.

En raisonnant comme dans le cas précédent, nous verrons encore que l'on peut limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quels que soient x, y, z, t,

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial y}\right| < \Psi, \qquad \left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right| < \Psi, \tag{8}$$

Ψ étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

Considérons, au sein du volume occupé par le fluide en équilibre, une certaine région ϖ; dans le cas le plus général, la surface qui délimite cette région peut se composer de trois parties : une partie S_0 appartenant à la surface déformable du fluide en équilibre, une partie Σ appartenant à la paroi invariable, enfin une partie σ tracée à l'intérieur du fluide.

Considérons l'expression

$$\left\{\begin{aligned} \Omega = & \int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + \int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)^2 dS_0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Selon ce qui a été vu au Chapitre II, § 1, si l'on désigne par ρ la densité à l'instant t du point matériel dont x, y, z étaient les coordonnées en l'état d'équilibre et dont ρ_0 était alors la densité, on peut limiter supérieurement A de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \Delta\psi + \theta A^2,$$

θ étant une fonction de x, y, z, t qui ne peut surpasser une certaine limite. On en conclut sans peine que l'on peut, si le système possède la stabilité habituelle, limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quel que soit x, y, z, t,

$$\Delta\psi < \mathrm{R}, \tag{19}$$

R étant une constante positive arbitrairement donnée d'avance.

On voit alors que la valeur absolue de Ω ne peut surpasser

$$\int \left[\frac{\mathrm{J}(\rho_0)}{\rho_0}\right]^2 \left(\left|\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\rho_0}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial\rho_0}{\partial z}\right|\right) \mathrm{R}^2 + \rho_0 \mathrm{R}^2 \, d\varpi$$
$$+ \mathrm{R}^2 \int \left|\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial n}\right| dS_0.$$

Partant, on peut limiter supérieurement les vitesses initiales de telle sorte que l'on ait, quel que soit t,

$$\Omega < \mathrm{M}, \tag{10}$$

M étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

L'égalité (18) donne

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} = {} & 2\int \frac{\mathrm{J}(\rho_0)}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \\ & \times \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right] d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial n} \frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t} \, dS_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

puis

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\Omega}{dt^2} = \; & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\
& + 2\int \frac{\partial H_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 \\
& + 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \\
& \qquad \times\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial^3\psi}{\partial x\,\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial^3\psi}{\partial y\,\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial^3\psi}{\partial z\,\partial t^2}\right)\right] d\varpi \\
& + 2\int \frac{\partial H_0}{\partial n}\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t^2}\,dS_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité (21) peuvent, en vertu des égalités (14) et (16), s'écrire

$$
(22)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2\int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)\right] d\varpi \\
& + 2\int \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,dS_0 \\
= & -2\int \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\Sigma - 2\int \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\sigma \\
& - 2\int \rho_0\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais l'égalité (15) vérifiée à tout instant, en tout point de la surface Σ, entraîne l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

qui, au second membre de l'égalité (22), fait disparaître le premier terme. L'égalité (21) devient alors

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\Omega}{dt^2} = \; & 2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\
& + 2\int \frac{\partial H_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0 \\
& - 2\int \left[\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi \\
& - 2\int \rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $t = 0$, nous avons, dans tout le volume ϖ,

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

partant, selon les égalités (2),

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_0 = 0;$$

nous avons aussi, selon l'égalité (17),

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

L'égalité (18) nous montre alors que l'on a, pour $t = 0$,

$$\Omega = 0. \tag{24}$$

L'égalité (20) nous montre que l'on a, au même instant,

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0. \tag{25}$$

Enfin, l'égalité (23) nous montre qu'à l'instant $t = 0$, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} = & -2\int \frac{J(\rho_0)}{\rho_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\,\partial t}\right)\right]^2 d\varpi \\ & + 2\int \frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n\,\partial t}\right)^2 dS_0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Les égalités (23), (24), (25), (26) vont nous permettre d'établir les propositions que nous avons en vue de démontrer.

Voici la première de ces propositions :

Dans le fluide en équilibre il existe une région d'étendue finie où $J(\rho_0)$ est négatif ; cette région n'est pas attenante à la surface déformable du fluide ; dans ces conditions, le fluide ne présente pas la stabilité habituelle.

Appliquons à ce cas les formules précédentes, en prenant pour volume ϖ la région de l'espace où $J(\rho_0)$ est négatif. Cette région

n'étant pas attenante à la surface déformable du fluide, le terme formé par une intégrale étendue à la surface S_0 doit disparaître des égalités (23) et (26).

D'autre part, $J(\rho_0)$ varie d'une manière continue à l'intérieur du fluide en équilibre; le volume ϖ, en tout point duquel $J(\rho_0)$ est négatif, est donc séparé des portions du fluide où $J(\rho_0)$ n'est pas négatif par une surface σ en tout point de laquelle $J(\rho_0) = 0$; l'égalité (16) nous apprend alors qu'en tout point de cette surface σ et à tout instant,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

ce qui, dans la formule (23), fait disparaître l'intégrale étendue à la surface σ.

Le second membre de l'égalité (26) est négatif, à moins qu'en tout point du volume ϖ on ait, à l'instant $t = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\, \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z\, \partial t}\right) = 0.$$

Mais, à l'instant $t = 0$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est seulement assujettie à ce que ses dérivées partielles en x, y, z ne surpassent pas en valeur absolue la limite imposée aux composantes de la vitesse; on peut donc toujours la choisir de telle sorte qu'elle ne vérifie pas cette condition.

Nous voyons alors que, des égalités (23), (24), (25), (26), on peut tirer les résultats suivants :

1° Pour $t = 0$, on a

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0,$$

2° Pour aucune valeur positive de t, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ n'est positif.

Il en résulte que, t croissant au delà de toute limite par valeurs positives, Ω est constamment négatif et sa valeur absolue croît au delà de toute limite. Or, ce résultat est contraire à la condition (10) qui serait vérifiée si le système possédait la stabilité habituelle.

Voici une seconde proposition :

Au sein du fluide en équilibre, il existe une région d'étendue finie en laquelle $J(\rho_0)$ est négatif; cette région confine à la surface déformable; en tout point de la partie S_0 de la surface déformable qui confine à cette région de l'espace, $\frac{dH}{dn}$ est négatif; le système fluide ne possède pas la stabilité habituelle.

Appliquons encore nos précédentes formules en prenant pour volume ϖ la région où $J(\rho_0)$ est négatif.

Il peut se faire que le volume ϖ se confonde avec le volume entier du fluide; dans ce cas, la surface σ n'existe pas et l'intégrale étendue à cette surface doit disparaître de la formule (23). Il se peut, au contraire, que le volume ϖ comprenne seulement une partie du fluide; dans ce cas, l'intégrale étendue à la surface σ que renferme la formule (23) est nulle pour la raison indiquée au cours de la précédente démonstration. Dans les deux cas, les égalités (23), (24), (25), (26) conduisent encore aux conséquences suivantes :

1° Pour $t = 0$, on a

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0.$$

2° Pour aucune valeur positive de t, $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ n'est positif.

La démonstration s'achève alors comme celle de la proposition précédente.

La proposition précédente implique celle-ci comme cas particulier :

Un fluide compressible, homogène, isothermique ne subit aucune action extérieure que celle d'une pression uniforme et constante; ce fluide en équilibre a partout la même densité ρ_0; si la quantité

$$J(\rho_0) = 2\rho_0 \frac{d\zeta(\rho_0)}{d\rho_0} + \rho_0^2 \frac{d^2\zeta(\rho_0)}{d\rho_0^2}$$

est négative, le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.

Dans ce cas, en effet, Π_0 a partout la même valeur et $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ est nul.

On démontrerait comme notre seconde proposition la proposition dont voici l'énoncé :

$J(\rho_0)$ *est nul dans une partie du fluide; cette partie est attenante à la surface déformable du fluide en équilibre; en la portion* S_0 *de cette surface à laquelle elle attient, il existe une aire finie où* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *est négatif; le fluide ne possède pas la stabilité habituelle.*

Rappelons que nous avions établi, au préalable, les propositions suivantes :

Pour qu'un fluide compressible et isothermique possède la stabilité nouvelle, il suffit :

1° *Que la quantité* $J(\rho_0)$ *ne soit négative en aucun point du fluide et que les points où elle est nulle ne forment pas un volume fini;*

2° *Que la quantité* $\frac{\partial \Pi}{\partial n}$ *ne soit négative en aucun point de la surface déformable du fluide et que les points où elle est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.*

On voit que nous sommes encore loin de posséder les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité soit nouvelle, soit habituelle d'un fluide homogène, compressible, isothermique, soumis exclusivement à des actions extérieures.

§ 3. — Cas du fluide entropique soumis à une pression uniforme et constante.

Prenons maintenant un fluide homogène et compressible soumis à une pression uniforme et constante; au sein de ce fluide en équilibre, la température a, en tout point, la même valeur T_0 et la densité la même valeur ρ_0. Supposons ce fluide assujetti, en tous ses mouvements, à vérifier une égalité de la forme

$$\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = E s(T),$$

où $s(T)$ est la même fonction de T pour tous les points du fluide.

A partir de l'état d'équilibre imprimons au fluide, sans aucun dérangement initial, des vitesses initiales dérivant d'une fonction potentielle; nous pourrons imposer à celles-ci des limites supérieures telles que les inégalités (1) soient vérifiées, A étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance. Nous pourrons d'ailleurs, selon ce qui a été vu au Chapitre III, § 4, limiter supérieurement cette constante A de telle sorte que l'on puisse écrire les égalités (2), où $\psi(x, y, z, t)$ vérifie les conditions suivantes :

1° En tout point de la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre, et à tout instant t, on a [Chapitre III, égalité (62)]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \tag{27}$$

2° En tout point de la paroi Σ et à tout instant, on a [Chapitre II, égalité (13)]

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0; \tag{28}$$

3° En tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre, et à tout instant, on a [Chapitre III, égalité (61)]

$$J(\rho_0, T_0)\Delta\psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0; \tag{29}$$

4° En tout point du même espace et à l'instant $t = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0. \tag{30}$$

A ce même instant, $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ sont nuls dans tout le fluide et $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial t}$, $-\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\,\partial t}$ sont égaux aux composantes de la vitesse.

Considérons l'expression

$$\Omega = \int J(\rho_0, T_0)(\Delta\psi)^2\, d\varpi, \tag{31}$$

où l'intégrale s'étend au volume entier du fluide.

Comme au paragraphe précédent, on peut, si le système possède la stabilité habituelle, imposer aux vitesses initiales des limites supérieures telles que l'on ait, quels que soient x, y, z, t, l'inégalité

$$(19) \qquad |\Delta\psi| < R,$$

R étant une quantité positive arbitrairement choisie d'avance. La valeur absolue de Ω demeurera certainement inférieure à

$$R^2 \int |J(\rho_0, T_0)| \, d\varpi,$$

en sorte que l'on peut, si le système est stable, imposer aux vitesses initiales des limites supérieures telles que l'on ait, quel que soit t,

$$(10) \qquad |\Omega| < M,$$

M étant une constante positive arbitrairement choisie d'avance.

L'égalité (31) donne

$$(32) \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 2 \int J(\rho_0, T_0) \Delta\psi \, \Delta \frac{\partial\psi}{\partial t} \, d\varpi,$$

puis

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2 \int J(\rho_0, T_0) \left(\Delta \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2 \int J(\rho_0, T_0) \Delta\psi \, \Delta \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \, d\varpi.$$

Selon l'égalité (29), cette dernière égalité devient

$$(33) \qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2 \int J(\rho_0, T_0) \left(\Delta \frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi + 2 \int \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \, \Delta \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \, d\varpi.$$

L'égalité (27) exige que l'on ait, à tout instant et en tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Cette égalité et l'égalité (28), vérifiée à tout instant, en tout point

de la surface Σ, permettent de donner à l'égalité (33) la forme

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Omega}{dt^2} = & \quad 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\ & - 2\int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^2\right] d\varpi. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (30) et l'égalité (29) montrent qu'à l'instant $t = 0$ on a, dans tout le fluide,

$$\Delta\psi = 0.$$

Les égalités (31) et (32) montrent alors qu'à l'instant $t = 0$ on a

$$(35)\qquad \Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0,$$

tandis qu'au même instant les égalités (30) et (34) donnent

$$(36)\qquad \frac{d^2\Omega}{dt^2} = 2\int J(\rho_0, T_0)\left(\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Ces calculs nous permettent de démontrer le théorème suivant :

Si, en un fluide entropique, la quantité $J(\rho_0, T_0)$ *est négative, le fluide en équilibre ne possède pas la stabilité habituelle.*

Dans ce cas, en effet, les égalités (35) et (36) nous donneraient, pour $t = 0$,

$$\Omega = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

En outre, on pourrait toujours, à cet instant, choisir la fonction $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, de telle sorte que $\Delta\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ne soit pas nul en tout point du fluide; on aurait alors, pour $t = 0$,

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} < 0.$$

Enfin, selon l'égalité (34), $\frac{d^2\Omega}{dt^2}$ ne pourrait devenir positif pour au-

cune valeur de t; Ω serait donc sans cesse négatif et sa valeur absolue croîtrait au delà de toute limite.

Cette conséquence, qui contredit à l'inégalité (10), démontre le théorème énoncé.

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet donnerait la proposition suivante :

Pour que notre fluide entropique possède la stabilité nouvelle il suffit que $J(\rho_0, T_0)$ *soit positif.*

Le cas où $J(\rho_0, T_0)$ est nul échappe également aux deux propositions.

§ 4. — Remarque générale.

Toutes ces démonstrations impliquent un postulat que renferment les égalités (2) et qui peut être regardé comme un cas particulier de cette proposition :

Si un système est animé d'un mouvement infiniment petit, les grandeurs variables qui définissent ce mouvement vérifient des équations qui ne diffèrent des équations dites des petits mouvements *que par des infiniment petits d'ordre supérieur; donc il existe des intégrales des équations des petits mouvements dont ces grandeurs elles-mêmes ne diffèrent que par des infiniment petits d'ordre supérieur; ces intégrales sont celles qui correspondent aux mêmes écarts initiaux et aux mêmes vitesses initiales que le mouvement infiniment petit que l'on considère.*

Ce postulat ne peut être tenu pour évident; les démonstrations précédentes ne peuvent donc prétendre à la même rigueur que les démonstrations données par M. Liapounoff et par M. Hadamard pour les systèmes qui dépendent d'un nombre limité de variables.

CHAPITRE V.

LES OSCILLATIONS PENDULAIRES DES CORPS FLUIDES.

§ 1. — Équations générales qui régissent les oscillations pendulaires propres des corps fluides.

Au présent Chapitre nous nous proposons d'aborder l'étude dynamique des oscillations pendulaires des corps fluides, dont l'étude cinématique a été donnée au Chapitre II, § 2. Nous nous bornerons, d'ailleurs, à étudier les oscillations *propres*, c'est-à-dire que nous supposerons nulles les actions perturbatrices appliquées soit aux diverses masses élémentaires, soit à la surface déformable. En outre, nous supposerons qu'en l'état d'équilibre au voisinage duquel le système oscille, la surface déformable était soumise à une pression uniforme.

Considérons tout d'abord le cas d'un *fluide homogène, compressible, isothermique,* soumis à des actions extérieures, newtoniennes ou non, qui dérivent d'une fonction potentielle.

Selon les égalités (34 *bis*) et (37) du Chapitre III, nous avons, en tout point (x, y, z) de l'espace occupé par le fluide en équilibre,

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 a_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 b_0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 c_0) = -A^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = A^2\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_0\right].$$

La seconde de ces égalités a lieu, en outre, quel que soit t.

$$(3)\qquad A^2 = \frac{\rho_0}{J}$$

est une fonction de x, y, z, déterminée lorsqu'on connaît l'état d'équilibre du fluide.

En outre, en tout point de la paroi immobile, et quel que soit t pour la seconde égalité, on a

$$(4) \qquad a_0\alpha + b_0\beta + c_0\gamma = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que la normale n fait avec les axes de coordonnées.

Enfin, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre, on a, quel que soit t [Chap. III, égalité (11)],

$$(6) \qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Il est facile de voir que ces formules (1), (2), (4), (5), (6) peuvent être regardées comme impliquant celles qui conviennent aux deux autres cas étudiés par nous.

Considérons le cas d'un *fluide homogène et incompressible*. L'égalité (11) du Chapitre III nous montre que l'on a, en tout point de l'espace qu'occupe le fluide en équilibre,

$$(1\ bis) \qquad \frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z} = 0.$$

En ce même point et à tout instant, on a, quel que soit t, selon l'égalité (12) du même Chapitre,

$$(2\ bis) \qquad \Delta\psi = 0.$$

Enfin, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre et à tout instant, on a, quel que soit t, l'égalité (23) du Chapitre III :

$$(6\ bis) \qquad \frac{\partial N}{\partial n}\frac{\partial\psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_0 - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Si l'on observe :

1° Que la densité ρ_0 a la même valeur dans tout le fluide;

2° Qu'en tout point de la surface terminale du fluide en équilibre, on a

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

on voit que les égalités (1 *bis*), (2 *bis*), (6 *bis*) peuvent être regardées comme des formes particulières des égalités (1), (2), (6), à la condition de faire, dans la première,

$$(3\ bis) \qquad A^2 = 0.$$

Considérons, pour terminer, le cas du *fluide entropique*.

L'égalité (55) du Chapitre III nous montre que l'on a, en tout point du volume qu'occuperait le fluide en équilibre,

$$(1\ ter) \qquad J(\rho_0, T_0)\left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial b_0}{\partial y} + \frac{\partial c_0}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

L'égalité (56) du même Chapitre donne, au même point et à tout instant,

$$(2\ ter) \qquad J(\rho_0, T_0)\,\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0.$$

Enfin, selon l'égalité (60) du Chapitre III, en tout point de la surface déformable du fluide en équilibre et à tout instant, on a

$$(6\ ter) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_0 = 0.$$

Le fluide entropique en équilibre était soustrait à toute action autre que celle d'une pression uniforme : la densité ρ_0 y avait donc la même valeur en tout point ; il en était de même de la pression Π_0, ce qui annule $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ en tout point de la surface terminale. Selon ces remarques, les égalités (1 *ter*), (2 *ter*), (6 *ter*) peuvent être regardées comme des cas particuliers des égalités (1), (2), (6), à condition de faire dans les deux premières

$$A^2 = \frac{\rho_0}{J(\rho_0, T_0)}.$$

Cette valeur de A^2 est indépendante de x, y, z.

L'étude des oscillations propres d'une masse fluide dépend donc, dans les trois cas que nous avons étudiés, des équations (1), (2), (4), (5), (6), où A^2 est une fonction donnée de x, y, z, ou une constante, ou zéro.

Supposons maintenant que les oscillations que nous voulons étudier soient des oscillations pendulaires.

Au Chapitre III, § 1, nous avons établi le théorème suivant :

Tout petit mouvement d'une masse fluide au sein de laquelle existe une fonction A admet une fonction potentielle des vitesses.

D'autre part, au Chapitre II, § 2, nous avons démontré cette autre proposition :

Pour qu'un petit mouvement pendulaire d'un milieu continu admette une fonction potentielle des vitesses, il faut et il suffit qu'il admette une fonction potentielle des élongations.

En rapprochant ces deux théorèmes, nous obtenons celui-ci :

Au sein des fluides qui admettent une fonction A et, en particulier, au sein des fluides que nous étudions, tout mouvement pendulaire infiniment petit dérive d'une fonction potentielle des élongations.

Dès lors, selon les égalités (11) et (21) du Chapitre II, on a, en chaque point et à chaque instant,

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial x}\cos 2\pi\frac{t}{T},\\ b &= -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial y}\cos 2\pi\frac{t}{T},\\ c &= -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T} - \frac{\partial\Psi'}{\partial z}\cos 2\pi\frac{t}{T},\end{aligned}\right.$$

Ψ et Ψ' étant deux fonctions des seules variables x, y, z.

D'autre part, les égalités (8) du Chapitre III donnent

$$(8)\qquad a = a_0 - \frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad b = b_0 - \frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad c = c_0 - \frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Identifions ces expressions de a, b, c. Nous en tirons sans peine

$$(9)\qquad a_0 = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x}, \qquad b_0 = -\frac{\partial \Psi'}{\partial y}, \qquad c_0 = -\frac{\partial \Psi'}{\partial z},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Psi'}{\partial x}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right),\\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Psi'}{\partial y}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right),\\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T} + \frac{\partial \Psi'}{\partial z}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités donnent

$$(11)\qquad \psi = \Psi \sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi'\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} - 1\right) + F(t).$$

De cette égalité nous tirons

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\left(\Psi \sin 2\pi\frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi\frac{t}{T}\right) + \frac{d^2F(t)}{dt^2},$$

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\Psi' - \left[\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right]_0.$$

Les égalités (1), (9) et (13) donnent

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right)\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right) + \frac{\pi^2 A^2}{T^2}\Psi' = A^2\left[\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right]_0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, les égalités (2), (10), (12), (13) et (14) donnent

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}\Psi\right]\sin 2\pi\frac{t}{T}\\ &+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi'}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}\Psi'\right]\cos 2\pi\frac{t}{T}\\ &= A^2\frac{d^2F(t)}{dt^2}. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité (15) nous permet d'écrire

$$(16)\qquad \frac{d^2F(t)}{dt^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\left(\alpha \sin 2\pi\frac{t}{T} + \alpha \cos 2\pi\frac{t}{T}\right).$$

α, α' étant deux constantes, et, partant,

$$(17)\qquad \left[\frac{d^2 F(t)}{dt^2}\right]_0 = \frac{4\pi^2}{T^2}\alpha'.$$

Dès lors, pour que les égalités (14) et (15) soient vérifiées, il faut et il suffit que les fonctions Ψ, Ψ' vérifient, en tout point, les équations

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+\frac{4\pi^2 A^2}{T^2}(\Psi-\alpha)=0,$$

$$(18\,bis)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi'}{\partial z}\right)+\frac{4\pi^2 A^2}{T^2}(\Psi'-\alpha')=0.$$

L'égalité (5), vérifiée à tout instant, en tout point de la paroi immobile, devient, en vertu des égalités (10),

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}\sin 2\pi\frac{t}{T}+\frac{\partial\Psi'}{\partial n}\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}-1\right)=0.$$

Elle exige que l'on ait, en tout point de cette paroi,

$$(19)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n}=0.$$

$$(19\,bis)\qquad \frac{\partial\Psi'}{\partial n}=0.$$

D'ailleurs, en vertu des égalités (9), l'égalité (19 *bis*) équivaut à l'égalité (4).

En vertu des égalités (10), (12), (13), (16) et (17), l'égalité (6) devient

$$\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi-\alpha)\right]\sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$+\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi'}{\partial n}+\frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi'-\alpha')\right]\left(\cos 2\pi\frac{t}{T}-1\right)=0.$$

Pour qu'elle soit vérifiée en tout point de la surface déformable et à tout instant, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface déformable,

$$(20)\qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}+\frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi-\alpha)=0,$$

$$(20\,bis)\qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi'}{\partial n}+\frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi'-\alpha')=0.$$

Posons maintenant

$$Z = \Psi - \alpha, \qquad Z' = \Psi' - \alpha',$$

et les égalités (7), (18), (18 *bis*), (19), (19 *bis*), (20), (20 *bis*) conduiront aux résultats suivants :

Lorsqu'un des fluides auxquels s'appliquent nos raisonnements est animé d'un petit mouvement pendulaire, les composantes a, b, c de l'élongation sont données par les formules

$$(21)\qquad \begin{cases} a = -\dfrac{\partial Z}{\partial x}\sin 2\pi\dfrac{t}{T} - \dfrac{\partial Z'}{\partial x}\cos 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ b = -\dfrac{\partial Z}{\partial y}\sin 2\pi\dfrac{t}{T} - \dfrac{\partial Z'}{\partial y}\cos 2\pi\dfrac{t}{T}, \\ c = -\dfrac{\partial Z}{\partial z}\sin 2\pi\dfrac{t}{T} - \dfrac{\partial Z'}{\partial z}\cos 2\pi\dfrac{t}{T}, \end{cases}$$

où Z, Z' sont deux fonctions de x, y, z soumises aux conditions suivantes :

Chacune d'elles vérifie :

1° *En tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre, l'équation*

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A^2}{T^2}Z = 0;$$

2° *En tout point de la paroi immobile, l'équation*

$$(23)\qquad \frac{\partial Z}{\partial n} = 0;$$

3° *En tout point de la surface déformable du fluide en équilibre, l'équation*

$$(24)\qquad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial Z}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}Z = 0.$$

§ 2. — Relation entre le problème précédent et un problème de calcul des variations. — Cas des fluides incompressibles.

Soit Ψ une fonction qui est régulière dans tout l'espace occupé par le fluide en équilibre, qui vérifie la condition

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \tag{25}$$

en tout point de la paroi immobile Σ, et la condition

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 = 0, \tag{26}$$

où l'intégrale s'étend à la partie déformable S_0 de la surface qui limite le fluide en équilibre.

Considérons la quantité

$$\Theta = \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 + 2\Psi \Delta \Psi \right] d\varpi, \tag{27}$$

où l'intégrale s'étend au volume occupé par le fluide en équilibre; en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} \int \Psi \Delta \Psi \, d\varpi = &- \int \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 - \int \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Sigma \\ &- \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi \end{aligned}$$

et de la condition (25), Θ peut encore s'écrire

$$\Theta = -2 \int \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 - \int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{28}$$

D'autre part, considérons la quantité

$$\Omega = - \int \frac{\partial V}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0. \tag{29}$$

Imaginons que l'on remplace la fonction Ψ par une fonction infiniment peu différente, $(\Psi + \delta\Psi)$, qui vérifie les conditions (25) et (26), ce qu'expriment les égalités

$$\delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0. \tag{30}$$

$$\int \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 = 0. \tag{31}$$

Supposons, en outre, que cette variation imposée à la fonction Ψ soit assujettie à laisser invariable la valeur de Θ, ce qu'exprime l'égalité

$$\delta\Theta = 0. \tag{32}$$

Cherchons à déterminer la fonction Ψ de telle sorte que ces conditions imposées à $\delta\Psi$ entraînent l'égalité

$$\delta\Omega = 0. \tag{33}$$

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe :

1° Deux constantes K et λ;

2° Une grandeur f, variable d'une manière continue le long de la surface Σ, telles que l'on ait, *quelle que soit la fonction* $\delta\Psi$,

$$\delta\Omega - K\,\delta\Theta - \lambda \int \delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 - \int f\,\delta \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Sigma = 0. \tag{34}$$

L'égalité (28) donne

$$\left\{\begin{aligned} \delta\Theta &= -2\int \Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n} dS_0 - 2\int \frac{\partial\Psi}{\partial n}\,\delta\Psi\, dS_0 \\ &\quad - 2\int \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right) d\varpi \\ &= -2\int \Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n} dS_0 + 2\int \Delta\Psi\,\delta\Psi\, d\varpi. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Selon cette égalité (35) et les égalités (29) et (30), l'égalité (34)

devient

$$(36)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int \left(\frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - K\Psi + \frac{\lambda}{2}\right)\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 + K\int \Delta\Psi\,\delta\Psi\,d\varpi \\ &\qquad\qquad + \int \frac{f}{2}\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette égalité ait lieu quelle que soit la fonction $\delta\Psi$, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la paroi Σ,

$$f = 0;$$

2° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre,

$$(37)\qquad \Delta\Psi = 0;$$

3° En tout point de la surface S_0,

$$(38)\qquad \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - K\Psi + \frac{\lambda}{2} = 0.$$

La fonction Ψ étant ainsi déterminée, cherchons quelle valeur elle fait prendre à Θ. Selon l'égalité (27), on a, en toutes circonstances,

$$\Theta = -\int \Psi\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int \Psi\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma + \int \Psi\,\Delta\Psi\,d\varpi.$$

Lorsque Ψ vérifie les égalités (25) et (37), cette égalité peut s'écrire, quelle que soit la constante C,

$$\Theta = -\int (\Psi - C)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0.$$

Prenons

$$C = \frac{\lambda}{2K}$$

et nous pourrons écrire cette égalité sous la forme

$$K\Theta = -\int \left(\Psi - \frac{\lambda}{2}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0$$

ou bien, puisque Ψ vérifie l'égalité (38) et que Ω est défini par l'égalité (39),

$$(39) \qquad K\Theta = \Omega.$$

Ainsi, *toute fonction Ψ qui satisfait à notre problème de calcul des variations fait prendre certaines valeurs aux expressions Ω et Θ; le rapport de ces valeurs est précisément la constante* K.

D'ailleurs, toute fonction Ψ qui résout le problème de calcul des variations que nous avons énoncé vérifie l'équation (37) en tout point de l'espace occupé par le fluide en équilibre; pour une telle fonction Ψ, la quantité Θ, définie par l'égalité (27), se réduit à

$$\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi.$$

On peut donc énoncer cette proposition :

Lorsqu'une certaine fonction Ψ satisfait au problème de calcul des variations que nous avons énoncé, la valeur correspondante de la constante K *est donnée par la formule*

$$(40) \qquad K = \frac{\int \frac{\partial N}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0}{\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right]}.$$

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet fournit, pour le fluide étudié, cette condition qui suffit à assurer la stabilité nouvelle :

La grandeur $\frac{\partial N}{\partial n}$ n'est positive en aucun point de la surface S_0; les points où elle est nulle ne forment pas, en la surface S_0, une aire d'étendue finie.

La formule (40) nous montre alors que *si cette condition de stabilité est vérifiée, toute valeur de la constante* K *qui correspond à une solution du problème posé est finie et positive.*

Nous pourrons alors poser

$$(41) \qquad K = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \frac{\lambda}{2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\alpha.$$

T et α étant deux constantes réelles. Si l'on observe alors que ρ_0 est une constante, que

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

et que, selon l'égalité (3 *bis*), A^2 est ici nul, on voit que les égalités (25), (37) et (38) deviennent respectivement identiques aux égalités (19), (18) et (20). En d'autres termes, toute solution du problème de calcul des variations posé en ce Paragraphe détermine une fonction $\Psi(x, y, z)$ et une constante K. *Le fluide peut être animé d'un petit mouvement pendulaire dont la période* T *est liée à la constante* K *par la première égalité* (41) *et dont l'élongation a pour composantes*

$$(42) \quad a = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad b = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad c = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Les relations que nous venons d'établir entre le problème des petits mouvements des fluides et un problème du calcul des variations entraînent la conséquence suivante :

Les équations des petits mouvements du fluide ne peuvent, si la condition qui suffit à assurer la stabilité nouvelle est vérifiée, admettre une intégrale de la forme

$$(43) \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}e^{Rt}, \\ b = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}e^{Rt}, \\ c = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial z}e^{Rt}, \end{cases}$$

où la constante R *serait réelle.*

On verrait sans peine, en effet, qu'une telle intégrale correspondrait

à une solution du problème de variations où la constante K aurait la valeur négative $-R^2$.

On peut, en suivant la voie tracée par Routh [1] pour le cas de systèmes dépendant d'un nombre limité de variables, indiquer un procédé régulier qui conduit à la formation d'une infinité de mouvements pendulaires, mouvements qui correspondent à des valeurs successives de K rangées par ordre de grandeurs croissantes, ou à des valeurs successives de T rangées par ordre de grandeurs décroissantes; ce procédé, d'ailleurs, n'est point entièrement rigoureux; il prête à la même objection que la méthode donnée par Lejeune-Dirichlet pour démontrer l'existence d'un état d'équilibre électrique.

Supposons d'abord la fonction Ψ assujettie à vérifier :

1° En tout point de la paroi Σ, l'égalité

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0; \tag{25}$$

2° L'égalité

$$\int \frac{\partial\Psi}{\partial n}\, dS_0 = 0; \tag{26}$$

3° L'égalité

$$\Theta = \int \left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2 + 2\Psi\,\Delta\Psi\right] d\varpi = 1. \tag{44}$$

Considérons les valeurs (44) de Ω données par la formule (29); si l'on suppose vérifiée la condition suffisante pour la stabilité nouvelle (et c'est ce que nous ferons), ces valeurs sont toutes positives; elles admettent une limite inférieure positive Ω_1; supposons, *ce qui n'est pas évident*, qu'il existe une détermination Ψ_1 de la fonction Ψ pour laquelle Ω atteint cette limite inférieure Ω_1, qui en est alors un minimum. L'hypothèse $\Psi = \Psi_1$ annulera donc $\delta\Omega$ quel que soit $\delta\Psi$; en d'autres termes, la fonction Ψ_1 vérifiera les égalités (25), (37), (38)

---

[1] Routh, *Proceedings of the mathematical Society of London*, Vol. X, 1879, p. 146.

et la valeur correspondante de K sera, selon les formules (39) et (44),

$$(45)\qquad K_1 = \Omega_1 = -\int \frac{\partial N}{\partial n}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial n}\right)^2 dS_0.$$

Imaginons maintenant que la fonction Ψ soit assujettie non seulement aux conditions (25), (26), (44), mais encore à la condition

$$(46)\qquad \mathfrak{Z}_1 = \int\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi = 0.$$

La fonction Ψ ne peut plus devenir égale ou proportionnelle à Ψ_1, car l'égalité (46) donnerait alors, en tout point,

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0,$$

égalités incompatibles avec la condition (44).

Considérons les valeurs, toutes positives, de Ω, qui correspondent à ces déterminations de Ψ. Ces valeurs admettent une limite inférieure positive Ω_2. Comme ces valeurs sont comprises parmi celles que nous avons considérées en premier lieu, Ω_2 ne peut être inférieur à Ω_1 :

$$(47)\qquad \Omega_2 \geqq \Omega_1.$$

Supposons que, pour une détermination Ψ_2 de Ψ, Ω atteigne cette valeur Ω_2, qui sera alors un minimum relatif aux conditions (25), (26), (44) et (46). Il devra exister trois constantes K_2, g, λ_2 et une grandeur f_2 variable d'une manière continue sur Σ, telles que l'égalité

$$(48)\qquad \delta\Omega - K_2\,\delta\Theta - g\,\delta\mathfrak{Z}_1 - \lambda_2\int \delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int f_2\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0$$

soit vérifiée quel que soit $\delta\Psi$ lorsqu'on y fait $\Psi = \Psi_2$.

Or on a

$$\delta\mathfrak{Z}_1 = \int\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\delta\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\delta\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}\delta\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\varpi$$

ou, en observant que $\Delta\Psi_1$ est nul, ainsi que $\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}$ sur la surface Σ,

$$\delta\mathfrak{Z}_1 = -\int \frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,\delta\Psi\,dS_0.$$

L'égalité (48) devient donc, en y remplaçant Ψ par Ψ_2,

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial n}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n} - K_2\Psi_2 - \frac{\lambda_2}{2}\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 + K_2\int\Delta\Psi_2\,\delta\Psi\,d\varpi \\ &\quad + \frac{g}{2}\int\frac{\partial\Psi_1}{\partial n}\,\delta\Psi\,dS_0 + \int f_2\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la fonction $\delta\Psi$. Pour cela, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la surface Σ,

$$f_2 = 0;$$

2°

$$g = 0;$$

3° En tout point du volume considéré,

$$\Delta\Psi_2 = 0;$$

4° En tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial n}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n} - K_2\Psi_2 - \frac{\lambda_2}{2} = 0.$$

La fonction Ψ_2, associée à la constante K_2, fournit donc une nouvelle solution de notre problème de variations; cette solution est essentiellement distincte de la première, car Ψ_2 ne peut être simplement proportionnel à Ψ_1; quant à la constante K_2, selon les égalités (39) et (44), elle a pour valeur

$$(45\,bis)\qquad K_2 = \Omega_2.$$

Les égalités (45) et (45 *bis*), jointes à la condition (47), donnent

$$(50)\qquad K_2 = K_1.$$

Nous trouverions une nouvelle solution de notre problème en cherchant, parmi les fonctions Ψ assujetties non seulement aux conditions (25), (26), (44), (46), mais encore à la condition

$$(46\,bis)\qquad \mathfrak{S}_2 = \int \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\varpi = 0,$$

quelle est la détermination Ψ_3 qui rend Ω minimum, et ainsi de suite.

M. H. Poincaré [1] a montré l'identité du problème des petits mouvements pendulaires des fluides incompressibles avec un problème de variations un peu différent du précédent.

On considère une fonction Ψ assujettie à vérifier :

1° En tout point de la surface Σ, la condition

$$(36)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0;$$

2° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre, la condition

$$(37)\qquad \Delta \Psi = 0;$$

et l'on cherche à déterminer cette fonction Ψ de manière qu'elle annule, quel que soit $\delta\Psi$, la variation du rapport

$$\frac{\Omega}{\int \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi} = \frac{\Omega}{\mathfrak{S}}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, selon l'égalité (29), une grandeur f variable d'une manière continue sur la surface Σ, et une fonction $\varphi(x, y, z)$ continue dans l'espace occupé par le fluide en équilibre, telles que l'égalité

$$(51)\qquad \frac{\mathfrak{S}\,\delta\Omega - \Omega\,\delta\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2} - \int \varphi\,\Delta\,\delta\Psi\,d\varpi - \int f\,\delta\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0$$

soit vérifiée quelle que soit la fonction $\delta\Psi$.

---

(1) H. Poincaré, *Sur l'équilibre et les mouvements des mers*, § 6 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. II, 1896, p. 87).

Or on a

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{T} &= 2\int\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi\\ &= -2\int\Psi\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS_0-2\int\Psi\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}d\Sigma-2\int\Psi\Delta\delta\Psi\,d\varpi.\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$\mathrm{K}=\frac{\Omega}{\mathfrak{T}}, \tag{52}$$

l'égalité (51) devient

$$\begin{aligned}\left\{\frac{2}{\mathfrak{T}}\int\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\mathrm{K}\Psi\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}dS_0+\int\left(f-\frac{2\mathrm{K}}{\mathfrak{T}}\Psi\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}d\Sigma\right.\\ \left.+\int\left(\varphi-\frac{2\mathrm{K}}{\mathfrak{T}}\Psi\right)\Delta\delta\Psi\,d\varpi=0.\right.\end{aligned} \tag{53}$$

Pour que cette égalité (53) soit vérifiée quelle que soit la fonction $\delta\Psi$, il faut et il suffit que la fonction Ψ, déjà assujettie aux conditions (25) et (37), vérifie en tout point de la surface S_0 l'égalité

$$\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\mathrm{K}\Psi=0, \tag{54}$$

et que l'on prenne

$$f=\frac{2\mathrm{K}}{\mathfrak{T}}\Psi$$

en tout point de la surface Σ de la paroi et

$$\varphi=\frac{2\mathrm{K}}{\mathfrak{T}}\Psi$$

en tout point du volume occupé par le fluide en équilibre.

La fonction Ψ ainsi déterminée, jointe à la constante K donnée par l'égalité (52), fournit une solution du problème des petits mouvements pendulaires des fluides et toute solution de ce problème peut être obtenue de la sorte.

Cette méthode nouvelle prête évidemment aux mêmes developpements que la précédente.

§ 3. — Relation entre le problème des petits mouvements pendulaires d'un corps fluide et un problème de variations. — Cas des fluides compressibles.

Soit Ψ une fonction assujettie aux conditions suivantes :

1° En tout point de la paroi immobile Σ, elle vérifie la condition

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0; \tag{55}$$

2° Elle vérifie l'égalité

$$\left\{\begin{aligned} H = & \int \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS_0 \\ & - \int \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \right] d\varpi = 0, \end{aligned}\right. \tag{56}$$

dont la forme nous est imposée par la condition que la masse demeure invariable en un petit mouvement où l'élongation a pour composantes

$$a = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$b = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$c = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \sin 2\pi \frac{t}{T};$$

3° La valeur de la quantité

$$\Theta = \int \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi \tag{57}$$

est invariable.

Remplaçons la fonction Ψ par une fonction infiniment peu différente $\Psi + \delta\Psi$, assujettie aux mêmes conditions, et cherchons à déterminer la fonction Ψ de telle sorte que cette variation annule la variation première de la grandeur

$$\left\{\begin{aligned} \Omega = & \int \frac{\partial H_0}{\partial n} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)^2 dS_0 \\ & + \int \frac{J_0}{\rho_0} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) \right]^2 d\varpi. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe :

1° Deux constantes K et α;

2° Une grandeur f, variable d'une manière continue sur la surface Σ, telles que l'on ait, *quel que soit* $\delta\Psi$, l'égalité

$$(59)\qquad \delta\Omega - K\,\delta\Theta - \lambda\,\delta H - \int f\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma = 0.$$

Posons

$$(60)\qquad X = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right).$$

L'égalité (58) nous donnera

$$(61)\qquad \delta\Omega = 2\int\frac{\partial H_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 + 2\int\frac{J_0}{\rho_0}X\,\delta X\,d\varpi.$$

De même, l'égalité (56) nous donnera

$$(62)\qquad \delta H = \int\rho_0\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 - \int\delta X\,d\varpi.$$

Enfin, l'égalité (57) nous permettra d'écrire

$$\delta\Theta = 2\int\rho_0\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d\varpi$$

ou bien, en vertu des égalités (55) et (60),

$$(63)\qquad \delta\Theta = -2\int\rho_0\Psi\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 - 2\int\Psi\,\delta X\,d\varpi.$$

En vertu des égalités (61), (62), (63), l'égalité (59) devient

$$(64)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial H_0}{\partial n}\frac{\partial\Psi}{\partial n} + K\rho_0\Psi - \rho_0\lambda\right)\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,dS_0 \\ &- \int f\,\delta\frac{\partial\Psi}{\partial n}\,d\Sigma + \int\left(\frac{J_0}{\rho_0}X + K\Psi - \lambda\right)\delta X\,d\varpi = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour que cette égalité ait lieu quel que soit $\delta\Psi$, partant, selon l'égalité (60), quel que soit δX, il faut et il suffit que l'on ait :

1° En tout point de la surface Σ,

$$f = 0; \tag{65}$$

2° En tout point de la surface S_0,

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \rho_0(K\Psi - \lambda) = 0; \tag{66}$$

3° En tout point du volume occupé par le fluide en équilibre,

$$\frac{J_0}{\rho_0}X + K\Psi - \lambda = 0. \tag{67}$$

Si l'on suppose Ψ choisi de manière à vérifier les égalités (66) et (67), la grandeur Ω, donnée par l'égalité (58), peut s'écrire

$$\Omega = -K\int \rho_0\left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0 - K\int\left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right)X\,d\varpi$$

ou, en remplaçant X par sa valeur (60),

$$\begin{aligned}\Omega = &-K\int \rho_0\left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right)\frac{\partial \Psi}{\partial n}\,dS_0\\ &-K\int\left(\Psi - \frac{\lambda}{K}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right]d\varpi.\end{aligned}$$

Si l'on remarque que l'égalité (55) est vérifiée en tout point de la surface Σ et si l'on se reporte à l'égalité (57), on peut transformer l'égalité précédente en

$$\Omega = K\Theta. \tag{68}$$

La méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet conduit aux conditions suivantes qui suffisent à assurer la stabilité nouvelle de la masse fluide :

1° *S'il s'agit d'un fluide soumis seulement à une pression normale et uniforme, cas auquel* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *a la valeur* 0 *en tout point de la surface* S_0, J_0 *a, dans tout le fluide, une même valeur positive.*

2° *En tout autre cas,* $\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}$ *n'est négatif en aucun point de la sur-*

face S_0; *les points où cette quantité est nulle ne forment pas une aire d'étendue finie.*

J_0 *n'est négatif en aucun point du volume occupé par le fluide en équilibre; les points où cette quantité est nulle ne forment pas un volume d'étendue finie.*

Restreignant un peu ces conditions, nous supposerons que J_0 *est toujours positif.*

Nous pourrons alors écrire, selon les égalités (3) et (3 *ter*),

$$\frac{J_0}{\rho_0} = \frac{1}{A^2}, \tag{69}$$

A étant une constante réelle et finie.

Les conditions que nous venons d'énumérer, comparées à l'égalité (58), nous assurent que Ω est essentiellement positif; selon l'égalité (57), il en est de même de Θ; dès lors l'égalité (58) conduit à la proposition suivante :

Moyennant les conditions fournies par la méthode de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, conditions qui suffisent à assurer la stabilité nouvelle, la constante K *est essentiellement positive.*

On peut alors poser

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2}, \qquad \lambda = \frac{4\pi^2\alpha}{T^2}, \tag{70}$$

α et T étant deux constantes réelles.

Moyennant les égalités (60), (69), (70), nos égalités (66) et (67) deviennent

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Pi_0}{\partial n}\frac{\partial \Psi}{\partial n} + \frac{4\pi^2}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) + \frac{4\pi^2 A}{T^2}(\Psi - \alpha) = 0. \tag{72}$$

La fonction Ψ, qui résout notre problème de variations, vérifie donc

les équations (55), (71), (72), qui sont identiques aux équations (19), (30) et (18); d'où la proposition suivante :

En un fluide où sont vérifiées les conditions suffisantes pour la stabilité nouvelle, toute solution de notre problème de variations détermine une fonction Ψ *et une constante positive* K, *auxquelles correspond un petit mouvement pendulaire défini par les formules*

$$a = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin\sqrt{K}\,t, \qquad b = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}\sin\sqrt{K}\,t, \qquad c = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}\sin\sqrt{K}\,t.$$

Réciproquement, tout petit mouvement pendulaire du fluide fournit une solution de notre problème de variations.

En raisonnant comme au Paragraphe précédent, on peut encore énoncer le théorème suivant :

En un fluide où sont vérifiées les conditions qui assurent la stabilité nouvelle, les équations des petits mouvements n'admettent aucune intégrale de la forme

$$(73) \qquad a = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}e^{Rt}, \qquad b = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}e^{Rt}, \qquad c = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}e^{Rt},$$

où R *serait une constante réelle.*

La méthode de Routh pour former une infinité de valeurs de T, rangées dans l'ordre des valeurs décroissantes, s'étend sans peine au cas actuel; nous ne la développerons pas, pour ne pas allonger outre mesure le présent écrit.

En terminant, nous ferons remarquer que la méthode que nous venons d'appliquer aux fluides compressibles a de grandes analogies avec les deux méthodes par lesquelles les fluides incompressibles ont été traités au Paragraphe précédent; mais elle n'est la simple généralisation ni de l'une ni de l'autre de ces dernières méthodes.

Contribution à l'analyse arithmétique du continu;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Introduction.

1. Toutes les Mathématiques peuvent se déduire de la seule notion de nombre entier; c'est là un fait aujourd'hui universellement admis. Voici ce que l'on entend généralement par là : les notions fondamentales où intervient l'idée de limite (nombres incommensurables, dérivées, intégrales définies, intégrales d'équations différentielles, etc.) sont définies successivement à partir du nombre entier; ces notions une fois acquises, on peut les utiliser sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir dans toute circonstance leur définition au moyen des nombres entiers. Telle est, dans ses grandes lignes, la méthode de Weierstrass.

On peut se placer à un point de vue plus strictement arithmétique, comme l'a fait Kronecker en Algèbre, et comme M. Jules Drach a récemment tenté de le faire en Analyse [1]. Ce nouveau point de vue

[1] M. Jules Drach a exposé ses idées dans la seconde partie de l'*Introduction à la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (d'après des Conférences de M. Jules Tannery, par ÉMILE BOREL et JULES DRACH; Paris, Nony; 1895) et dans sa Thèse : *Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes* (Paris, Gauthier-Villars, 1898, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1898).

Ces idées me paraissent mériter d'être plus connues; en Algèbre, elles ne sont

peut être caractérisé par le fait que l'on ne fait jamais intervenir dans chaque question qu'*un nombre limité de nombres entiers* au moyen desquels tous les éléments de la question sont explicitement définis. On arrive ainsi à définir les nombres algébriques et certains nombres transcendants uniquement au moyen des relations par lesquelles ils sont reliés aux entiers, les signes opératoires étant définis uniquement par leurs propriétés fondamentales ([1]). Dans cette construction, l'idée de grandeur n'intervient en rien. On ignore d'ailleurs complètement ce que peut être un nombre incommensurable non défini *logiquement* et, d'après la marche même suivie, on n'en peut définir qu'une infinité dénombrable. Certains esprits verront là une lacune; d'autres penseront, au contraire, que, pratiquement, tout nombre, pour être connu effectivement, doit pouvoir *être caractérisé* par un nombre fini de mots et, par suite, doit trouver sa place dans le système de M. Drach (convenablement complété).

Si l'on considère ainsi un nombre (rationnel, algébrique ou transcendant) caractérisé par un certain nombre d'*entiers* et par certaines *opérations*, il est clair qu'on est conduit à regarder ce nombre comme d'autant plus compliqué que ces entiers sont plus *nombreux* et plus *élevés* et ces opérations plus *nombreuses*. La complication de chaque nombre peut être ainsi caractérisée numériquement; la marche que l'on peut employer dans ce but présente un certain arbitraire qui sera précisé plus loin dans la mesure nécessaire; je tenais simplement à signaler ici cette notion de la plus ou moins grande complication d'un nombre (à partir des entiers, c'est-à-dire à partir de l'unité); le nombre ou symbole qui mesurera cette complication sera dit la *hauteur* du nombre dans le système considéré.

2. Un point de vue presque opposé au précédent consiste à ne se

---

pas sans analogie avec celles de Kronecker, tout en s'en distinguant essentiellement en bien des points); il y aura lieu, bien entendu, de ne pas se borner, comme l'a fait jusqu'ici M. Drach, à étudier les équations différentielles et aux dérivées partielles, mais d'attaquer par la même méthode les autres procédés transcendants par lesquels on peut définir des nombres et des fonctions. Cette remarque appartient d'ailleurs à M. Drach.

([1]) Drach, *loc. cit.*

préoccuper que des *valeurs numériques*, de la *grandeur* des nombres, sans s'inquiéter de leur définition logique : on recherche alors les nombres rationnels approchés et c'est par cette voie que les entiers apparaissent. La théorie des fractions continues numériques joue ici un rôle capital. Elle fournit les nombres rationnels les plus approchés d'un nombre *quelconque*. Dans un grand nombre d'autres questions interviennent ainsi des relations de *grandeur* entre certains systèmes d'entiers et un ou plusieurs nombres incommensurables quelconques. Parmi les plus célèbres citons la proposition de Jacobi sur l'impossibilité d'une fonction uniforme à trois périodes et les beaux travaux de Lejeune-Dirichlet.

Vinrent ensuite les mémorables recherches arithmétiques de Charles Hermite, qui furent suivies par celles de Kronecker et de M. Minkowski sur les systèmes de formes linéaires à coefficients quelconques et à indéterminées entières. M. Minkowski a rassemblé, dans sa *Geometrie der Zahlen*, malheureusement encore inachevée, les principaux résultats acquis dans cet ordre d'idées, et en grande partie dus à ses propres recherches.

M. Minkowski a montré que l'on pouvait arriver à des résultats nombreux et importants par une méthode uniforme, basée sur un petit nombre de principes simples et intuitifs.

Rappelons en quoi elle consiste, en nous bornant au cas le plus simple, pour lequel elle paraît due à Lejeune-Dirichlet. Si l'on a $n+1$ points sur une droite, dans un intervalle dont la longueur est égale à n, il y a au moins deux de ces points dont la distance est inférieure à 1 (sauf dans le cas particulier où les $n+1$ points ont les coordonnées $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$, lorsque l'on prend pour origine l'une des extrémités de l'intervalle). Cette proposition se démontre en divisant l'intervalle donné en n parties égales ; comme il y a $n+1$ points, il y a au moins un intervalle partiel qui en renferme deux et la distance de ces deux points est inférieure à 1 (une discussion facile relative aux points coïncidant avec les extrémités conduit au seul cas exceptionnel signalé).

5. Les nombres incommensurables sont ainsi définis de deux manières essentiellement différentes, à partir des nombres entiers : il est

du plus grand intérêt d'étudier les relations entre ces deux définitions. Le premier résultat, à ce point de vue, est dû à Lagrange qui a démontré, en 1770, la périodicité du développement en fraction continue des irrationnelles quadratiques. Les résultats obtenus par M. Minkowski relativement à la périodicité de certains algorithmes numériques pour les nombres algébriques de degré déterminé ([1]), doivent être regardés comme la généralisation, à un certain point de vue, du résultat de Lagrange.

Les résultats de Liouville sur l'approximation des nombres algébriques par des nombres rationnels le généralisent dans une autre direction, bien qu'ils ne fassent pas connaître une propriété *caractéristique* des nombres algébriques.

On peut aussi obtenir des résultats très simples, soit au sujet de l'approximation des nombres algébriques les uns par les autres, soit au sujet de l'approximation par des nombres rationnels ou algébriques de certains nombres transcendants se rattachant à la fonction exponentielle; ces dernières recherches se rattachent à celles qui ont été inspirées par le célèbre Mémoire de Charles Hermite sur la transcendance du nombre e. J'ai déjà indiqué certains résultats à ce sujet ([2]); je compte y revenir en utilisant les méthodes de ce Mémoire ([3]).

Ces diverses recherches ont une même conclusion générale : la rapidité de l'approximation des nombres incommensurables par des nombres rationnels est en relation simple avec la *hauteur* de ces nombres, telle que nous l'avons définie tout à l'heure.

C'est là un principe dont l'importance à la fois théorique et pratique me paraît devoir être considérable.

4. Ce Mémoire est consacré exclusivement aux nombres rationnels et à leur emploi pour l'approximation des incommensurables *quel-*

([1]) *Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.* (*Göttinger Nachrichten*, 11 février 1899). *Ueber periodische Approximation algebraischer Zahlen* (*Acta mathematica*, t. XXVI).

([2]) *Comptes rendus*, 6 mars 1899.

([3]) Comparez ma Note dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1903.

conques. Parmi les résultats nouveaux qui y sont renfermés, je citerai notamment le suivant :

Il est possible de déterminer a priori *une infinité d'intervalles* (A_n, B_n) *tels que* A_n *et* B_n *augmentent indéfiniment avec* n *et tels que,* α *étant un nombre incommensurable quelconque compris entre* 0 *et* 1, *il existe des nombres* p_n, q_n, *vérifiant les inégalités*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}},$$

$$A_n < q_n < B_n.$$

Ce théorème est d'ailleurs susceptible de nombreuses généralisations.

5. Plusieurs des résultats de ce Mémoire ont été obtenus comme conséquence d'un principe très simple, dont je voudrais dire quelques mots, en me bornant au cas d'un domaine à une seule dimension.

Reprenons la question qui a été traitée tout à l'heure par la méthode de Lejeune-Dirichlet : *on sait que* $n+1$ *points sont sur l'axe* Ox *et que leurs abscisses sont toutes comprises entre* 0 *et* n; il faut prouver que, parmi ces points, il en est deux au moins dont la distance est *inférieure à un* (en excluant le cas où les abscisses seraient $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$).

Voici comment nous pourrons raisonner : soit x_i l'abscisse de l'un des points; considérons les $n+1$ intervalles

$$(A_i) \qquad \left(x_i - \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

L'*étendue totale* de ces $n+1$ intervalles est $n+1$; comme ils s'étendent *au plus* dans l'intervalle

$$(A) \qquad \left(-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$$

d'étendue $n+1$, deux hypothèses seulement sont possibles : ou bien les intervalles A_i sont exactement juxtaposés de manière à constituer

l'intervalle A (c'est le cas où l'on a $x_i = i$); ou bien il existe des points de A qui n'appartiennent à aucun des A_i et *il existe par suite des points de* A *qui appartiennent à deux des* A_i (sinon l'étendue totale des A_i serait inférieure à celle de A); si un point de A appartient aux intervalles A_p et A_q, c'est-à-dire aux intervalles

$$\left(x_p - \frac{1}{2}, x_p + \frac{1}{2}\right), \quad \left(x_q - \frac{1}{2}, x_q + \frac{1}{2}\right),$$

il en résulte

$$|x_p - x_q| < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration est assurément très analogue à celle de tout à l'heure; elle s'en distingue cependant en un point important : au lieu de diviser l'intervalle o, n en intervalles fixes, indépendants des nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sur lesquels on raisonne, on considère des intervalles formés à partir de ces nombres eux-mêmes.

Lorsqu'il n'y a qu'un *nombre limité* d'intervalles, les deux méthodes sont, au fond, équivalentes. Il en est tout autrement lorsqu'il y en a un nombre illimité.

Considérons, par exemple, le segment $0 \leqq x \leqq 1$ et les points d'abscisse rationnelle qu'il renferme; si l'on divise, *a priori*, le segment en un nombre quelconque de segments partiels, chacun de ces segments partiels renfermera des points d'abscisse rationnelle; de sorte que la somme des segments qui renferment des points d'abscisse rationnelle est égale à *un*, quelque nombreux que soient ces segments.

On peut, au contraire, en construisant des segments *à partir* des points d'abscisse rationnelle, obtenir un ensemble dénombrable de segments, dont la longueur totale soit inférieure à tout nombre donné d'avance et tel que tout point à abscisse rationnelle soit intérieur à un segment de l'ensemble.

Il y a donc ici une différence essentielle entre les deux méthodes; j'ai indiqué, pour la première fois, cette différence à propos de la définition de la mesure des ensembles linéaires de points [1]. M. Lebesgue a ensuite appliqué des principes analogues à la généralisation de la

---

[1] *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

notion d'intégrale définie et est arrivé à des résultats fort remarquables [1].

On peut caractériser cette différence de méthode en disant que l'on construit le continu au moyen de petits intervalles entourant des points isolés, au lieu d'arriver à ces points par la subdivision indéfinie de l'étendue donnée d'avance; la construction est faite, si l'on peut ainsi dire, du dedans et non plus du dehors. Je pense que la lecture de ce Mémoire convaincra des avantages que présente le plus souvent cette nouvelle manière de procéder.

La notion de hauteur.

6. Sauf indication expresse du contraire, nous nous bornerons à considérer les nombres réels compris entre 0 et 1: l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ sera dit l'*intervalle fondamental;* le *domaine fondamental* à n dimensions sera l'ensemble des valeurs des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont aux inégalités

$$0 \leq x_1 \leq 1, \qquad 0 \leq x_2 \leq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leq x_n \leq 1.$$

Les nombres rationnels peuvent être, comme l'on sait, rangés sous la forme d'une suite simplement infinie; nous adopterons l'ordre suivant :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}; \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}; \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}; \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}; \frac{0}{5}, \ldots$$

Les dénominateurs prennent successivement les valeurs entières successives 1, 2, 3, 4, ..., et, pour chaque valeur du dénominateur, le numérateur prend des valeurs entières croissantes, de manière que

---

[1] Pour la Thèse de M. Lebesgue, l'historique de la notion d'intégrale définie a été exposée par M. Lebesgue, avec ses idées personnelles, dans un Cours fait au Collège de France en 1902-1903. Ce Cours paraîtra prochainement dans la *Collection de monographies sur la théorie des fonctions* publiée par M. Gauthier-Villars sous la direction de M. Émile Borel.

la fraction varie de 0 à 1, *ces valeurs extrêmes comprises*. Le rang occupé par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ dans la suite précédente est évidemment

$$r = 2 + 3 + 4 + \ldots + q + (p + 1),$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{q(q+1)}{2} + p.$$

Comme p est au plus égal à q, ce rang est sûrement inférieur à q^2 dès que q dépasse 2. Lorsque r augmente indéfiniment, le rapport $\frac{r}{q^2}$ a pour limite $\frac{1}{2}$.

Nous appellerons, d'une manière générale, *hauteur* du nombre $\frac{p}{q}$ *une fonction positive non décroissante quelconque, mais bien déterminée, de r, assujettie à la seule condition d'augmenter indéfiniment avec r.*

Dans ce qui suit nous prendrons simplement, sauf indication contraire

$$h = q,$$

c'est-à-dire que *la hauteur d'un nombre rationnel est égale à son dénominateur.*

Il importe de remarquer qu'il n'y a qu'un *nombre fini* de nombres dont la hauteur est inférieure à un nombre fixe.

Il est clair que l'on aurait pu adopter un autre rangement, par exemple le suivant :

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1},\ \frac{0}{2};\ \frac{0}{3},\ \frac{1}{2};\ \frac{0}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2};\ \frac{0}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3};\ \frac{0}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{3};\ \ldots.$$

On aurait alors pour chaque nombre un autre rang r' et l'on définirait d'autres hauteurs h'; nous n'entrerons pas dans le détail de la comparaison des diverses définitions qu'il pourrait sembler naturel d'adopter; indiquons cependant que, si celle que nous avons choisie

nous a paru la plus simple pour notre but actuel, d'autres pourraient être préférables dans d'autres recherches [1].

7. Considérons maintenant un système fini de nombres rationnels (toujours compris entre 0 et 1). On pourra ranger tous les systèmes possibles dans un ordre déterminé et définir ainsi pour chacun d'eux le *rang* et la *hauteur*.

Si l'on suppose d'abord que le nombre des nombres du système est donné d'avance, et qu'on le désigne par n, on pourra, par exemple, procéder ainsi : soit

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q_n}$$

un quelconque des systèmes; on supposera que le plus grand des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_n$ est égal à q; tous les systèmes (A) satisfaisant à cette condition constitueront le $q^{\text{ième}}$ groupe et seront rangés dans ce groupe suivant une loi arbitraire; il suffira d'écrire alors le premier groupe, puis le second, puis le troisième, etc., pour avoir la suite cherchée.

Nous prendrons généralement comme *hauteur* du système (A) le plus grand des nombres $q_1, q_2, \ldots, q_n$; on pourrait prendre aussi la somme de ces nombres, ou bien leur produit, etc.

Un cas particulier intéressant est celui où tous les nombres d'un système sont supposés avoir le même dénominateur; il en résulte une

---

[1] Dans le cas où l'on définirait la hauteur h d'un nombre $\frac{p}{q}$ comme égale à $p+q$, il y aurait une relation particulièrement simple entre cette hauteur et le nombre des opérations élémentaires nécessaires pour définir le nombre à partir de l'unité; par exemple : $\frac{3}{5} = \frac{1+1+1}{1+1+1+1+1}$.

Cette remarque peut conduire à des aperçus fort généraux sur les résultats que nous obtiendrons, les faisant apparaître comme se rattachant à une conception que nous ne développerons pas ici. Elle a été brièvement esquissée dans ma Note des *Comptes rendus* du premier semestre 1903, où j'ai pu aussi la possibilité de définir la hauteur d'un nombre entier en tenant compte de son expression comme produit de facteurs premiers. Mais il serait nécessaire pour la développer de posséder quelques lueurs sur la distribution des nombres premiers.

diminution très notable du nombre des systèmes; soit un tel système

$$\text{(B)} \qquad \frac{p_1}{q}, \quad \frac{p_2}{q}, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q}.$$

Si l'on range les systèmes (A) d'une part et les systèmes (B) d'autre part, un système appartenant aux deux suites occupera un rang bien plus élevé dans la première que dans la seconde. Cette remarque sera précisée plus loin.

Enfin, il peut arriver que le nombre n ne soit pas donné, mais puisse prendre toutes les valeurs possibles; la hauteur d'un système tel que (A) devra être encore définie de manière qu'il n'y ait qu'un nombre fini de systèmes dont la hauteur soit inférieure à un nombre fixe. Nous n'insistons pas sur le choix des diverses définitions possibles, car nous n'aurons guère à nous en servir.

L'approximation des nombres rationnels les uns par les autres. L'écart.

8. Rappelons quelques propriétés élémentaires des fractions continues limitées, de manière à fixer les notations que nous emploierons.

Tout nombre rationnel α compris entre 0 et 1 peut être écrit sous la forme

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}},$$

les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant positifs, et a_n pouvant être toujours supposé différent de 1 (car on peut, si $a_n = 1$, remplacer a_{n-1} par $a_{n-1} + 1$). Nous poserons

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ q_0 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_1 = 1, \\ q_1 = a_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_2 = a_2, \\ q_2 = 1 + a_1 a_2; \end{cases}$$

$$(1) \qquad \begin{cases} p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases} \qquad (i = 3, 4, \ldots, n).$$

Le nombre α est égal à $\frac{p_n}{q_n}$; les réduites $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_3}{q_3}, \frac{p_5}{q_5}, \ldots$ sont supérieures à α; $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_4}{q_4}, \frac{p_6}{q_6}, \ldots$ sont inférieures à α. On a toujours

$$p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i.$$

Nous aurons à utiliser la valeur du rapport $\frac{q_i}{q_{i-1}}$ des dénominateurs de deux réduites consécutives; posons

$$\mu_i = \frac{q_i}{q_{i-1}}.$$

La relation (1) donne

$$\mu_i = a_i + \frac{1}{\mu_{i-1}}. \tag{2}$$

On peut conclure de la relation (2) que *l'un au moins des deux nombres μ_i, μ_{i-1} est supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

En effet, si $a_i > 1$, il est clair que l'on a

$$\mu_i > a_i \geq 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Si $a_i = 1$, la relation (2) devient

$$\mu_i = 1 + \frac{1}{\mu_{i-1}}. \tag{3}$$

Le nombre μ_{i-1} étant rationnel, si l'on n'a pas

$$\mu_{i-1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{4}$$

on a certainement

$$\mu_{i-1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5}$$

le signe $<$ excluant l'égalité. Les relations (3) et (5) entraînent

$$\mu_i > 1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}.$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \mu_i > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On a donc certainement l'une des relations (4) ou (6).

Il n'est pas inutile d'observer que, si l'on désigne par A un nombre quelconque supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il est possible de former une fraction continue limitée telle que deux rapports consécutifs μ_i, μ_{i-1} soient tous deux inférieurs à A. Il suffit de prendre n et i assez grands et de supposer $a_j = 1$ pour toute valeur de j; nous omettrons la démonstration facile de ce point [1].

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'on désigne par* $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$, $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$, $\frac{p_i}{q_i}$ *trois réduites consécutives d'une fraction continue, l'un au moins des rapports*

$$\mu_i = \frac{q_i}{q_{i-1}}, \qquad \mu_{i-1} = \frac{q_{i-1}}{q_{i-2}}$$

est supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

9. Étant données deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$, on peut définir un nombre positif λ par la relation

$$(7) \qquad \left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \lambda\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Ce nombre λ sera dit l'*écart relatif* des deux *fractions*. Nous verrons plus loin quels avantages il peut y avoir à ne pas considérer exclusivement des fractions irréductibles; c'est pourquoi nous parlons de l'écart relatif *de deux fractions* et non pas de deux *nombres*.

Calculons l'*écart relatif* λ_i de deux réduites consécutives $\frac{p_i}{q_i}$ et $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$,

---

[1] *Comparer* avec le Mémoire de M. Hurwitz cité à la page suivante.

on a

$$\lambda_i = \frac{\left|\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}\right|}{\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_{i-1}^2}} = \frac{\frac{1}{q_i q_{i-1}}}{\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_{i-1}^2}} = \frac{q_i q_{i-1}}{q_i^2 + q_{i-1}^2}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{\lambda_i} = \frac{q_i}{q_{i-1}} + \frac{q_{i-1}}{q_i} = \mu_i + \frac{1}{\mu_i}.$$

Supposons que l'on ait

$$\mu_i > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Il en résulte, la fonction $x + \frac{1}{x}$ étant croissante pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\lambda_i} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\lambda_i} > \sqrt{5},$$

$$\lambda_i < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le théorème I entraîne donc le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si l'on considère trois réduites consécutives et que l'on désigne par λ_{i-1} et λ_i les écarts relatifs de la réduite intermédiaire et des deux autres, on peut affirmer que l'un au moins de ces écarts est inférieur à $\frac{1}{\sqrt{5}}$.*

10. Nous appellerons *intervalle canonique relatif à une fraction* $\frac{p}{q}$ l'intervalle

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^2\sqrt{5}}, \qquad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^2\sqrt{5}}.$$

Il résulte d'une proposition de M. Hurwitz que tout nombre incommensurable est compris dans une infinité d'intervalles canoniques [1]:

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. XXXIX.

il en est de même de tout nombre commensurable, si l'on ne se borne pas aux fractions $\frac{p}{q}$ irréductibles. Dès lors, on peut conclure, de la théorie de la mesure des ensembles linéaires de points [1], qu'*il est possible de déterminer une infinité d'ensembles finis d'intervalles canoniques tels que tout nombre compris entre* 0 *et* 1 *soit compris dans l'un des intervalles de chaque ensemble*. En d'autres termes, il est possible de recouvrir complètement le segment $0 - 1$ avec des intervalles canoniques en nombre fini (empiétant les uns sur les autres), de telle manière qu'il n'y ait aucun vide; et l'on peut répéter cette opération une infinité de fois sans utiliser plusieurs fois le même intervalle canonique.

La théorie de la mesure qui nous fournit ce résultat donne seulement un moyen théorique de déterminer les ensembles finis d'intervalles dont nous venons de parler; nous déterminerons bientôt *effectivement* de tels ensembles [2]. Nous serons ainsi amenés à retrouver, par une autre voie, le théorème de M. Hurwitz, tout en établissant d'autres résultats, d'une nature très différente.

11. Nous dirons que deux intervalles canoniques sont adjacents lorsqu'ils ont une partie commune; les fractions correspondantes sont dites aussi *adjacentes*. *La condition nécessaire et suffisante pour que deux fractions soient adjacentes est que leur écart relatif soit inférieur à* $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Soient, en effet, $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ deux fractions; nous pouvons supposer, pour fixer les idées,

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}. \tag{8}$$

---

(1) *Voir* ma *Thèse* (note finale) et mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III.

(2) Il est clair que leur choix peut être fait d'une infinité de manières; il y a lieu de penser qu'il est possible de simplifier celui que j'indique; j'ai surtout recherché la simplicité de la démonstration. Ce qui paraît moins aisé, c'est de faire le choix de manière que tout nombre se trouve dans deux au plus des intervalles de chaque ensemble (ce qui est théoriquement possible).

Les intervalles canoniques correspondants sont

$$(9)\qquad \left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^2\sqrt{5}},\ \frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}}\right);\quad \left(\frac{r}{s}-\frac{1}{s^2\sqrt{5}},\ \frac{r}{s}+\frac{1}{s^2\sqrt{5}}\right).$$

En vertu de la relation (8), pour que les intervalles (9) soient adjacents, il faut et il suffit que l'on ait

$$(10)\qquad \frac{r}{s}-\frac{1}{s^2\sqrt{5}}<\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \frac{r}{s}-\frac{p}{q}<\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}\right).$$

Il suffit de comparer cette inégalité (11) avec la relation (7) par laquelle nous avons défini l'écart relatif λ, pour en conclure :

$$(12)\qquad \lambda<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Il n'est pas inutile d'observer que l'écart relatif étant forcément un nombre rationnel, l'inégalité (11) exclut certainement l'égalité. Il en résulte qu'il en est de même de (10), c'est-à-dire que les extrémités des intervalles canoniques ne peuvent pas coïncider : ou bien ces intervalles empiètent l'un sur l'autre $\left(\text{lorsque } \lambda<\frac{1}{\sqrt{5}}\text{; les fractions sont adjacentes}\right)$; ou bien ils sont complètement extérieurs l'un à l'autre $\left(\text{lorsque } \lambda>\frac{1}{\sqrt{5}}\text{; les fractions ne sont pas adjacentes}\right)$.

En utilisant les résultats précédemment acquis, on peut énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME III. — *Pour que deux réduites consecutives d'une fraction continue soient adjacentes, il est necessaire et suffisant que le rapport de leurs dénominateurs soit superieur à* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

THÉORÈME IV. — *Si les réduites de rangs $i-2$ et $i-1$ ne sont pas adjacentes, on peut affirmer que les reduites de rangs $i-1$ et i*

le sont. (Il pourrait d'ailleurs arriver que les deux premières soient adjacentes et que les deux autres le soient aussi.)

La valeur α de la fraction continue est comprise entre celle de deux réduites consécutives; lorsque ces deux réduites sont des fractions adjacentes, l'intervalle formé par la réunion de leurs intervalles canoniques renferme à son intérieur le nombre α; ce nombre α est donc *intérieur* à l'un de ces intervalles canoniques (extrémités exclues); cette remarque suffit à établir le théorème de M. Hurwitz (en supposant α irrationnel); on peut même en conclure que, *parmi les réduites d'une fraction continue, il ne peut pas y en avoir trois consécutives, telles que la valeur de la fraction continue ne soit pas intérieure à l'intervalle canonique correspondant.* Mais, pour atteindre complètement notre but, il est indispensable d'étudier d'autres catégories d'intervalles adjacents, correspondant à des fractions non irréductibles.

La formation de systèmes complets de fractions.

12. Nous dirons que des fractions (*en nombre limité*) constituent un système complet lorsque les intervalles canoniques correspondants recouvrent complètement l'intervalle $0 - 1$; c'est-à-dire lorsque tout point (*nombre*) compris entre 0 et 1 est *intérieur* à l'un de ces intervalles (extrémités exclues).

Pour que des fractions constituent un système complet, il est évidemment nécessaire et suffisant qu'elles puissent être rangées en une suite linéaire, telle que chaque fraction de la suite soit supérieure à la précédente et lui soit adjacente, et que, de plus, les intervalles canoniques relatifs aux fractions extrêmes de la suite renferment l'une le point 0 *et l'autre le point* 1. Pratiquement, nous supposerons toujours que la première fraction de la suite est égale à 0 et que la dernière est égale à 1 $\left(\text{ces fractions seront de la forme } \frac{0}{h}, \frac{h}{h}\right)$.

13. Nous donnerons à cette condition une forme plus commode pour les applications.

THÉORÈME V. — *Étant donné un système limité de fractions (comprises entre* 0 *et* 1*) renfermant une fraction égale à zéro et une fraction égale à un: pour que ce système soit complet, il est nécessaire et suffisant que, étant donnée une fraction quelconque* $\frac{p}{q}$ *du système, il soit possible de trouver deux fractions* $\frac{r}{s}$ *et* $\frac{v}{w}$ *du système l'une supérieure, l'autre inférieure ou égale, ou identique à* $\frac{p}{q}$ *et adjacentes entre elles.*

Soit, en effet, $\frac{p_1}{q_1}$ la fraction du système qui est égale à zéro, ou l'une quelconque d'entre elles s'il y en a plusieurs. Par hypothèse, il existe deux *fractions adjacentes entre elles* $\frac{p'_2}{q'_2}$ et $\frac{p_2}{q_2}$, telles que l'on ait

$$\frac{p'_2}{q'_2} - \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}. \tag{13}$$

D'ailleurs, comme $\frac{p_1}{q_1} = 0$ et que $\frac{p'_2}{q'_2}$ ne peut pas être négatif, on a ici certainement

$$\frac{p'_2}{q'_2} = \frac{p_1}{q_1}.$$

De même, à la fraction $\frac{p_2}{q_2}$ correspondent deux fractions adjacentes entre elles $\frac{p'_3}{q'_3}$ et $\frac{p_3}{q_3}$ telles que l'on ait

$$\frac{p'_3}{q'_3} - \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_3}{q_3}.$$

On écrira de même la relation générale

$$\frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}} - \frac{p_\mu}{q_\mu} < \frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}}, \tag{14}$$

les fractions $\frac{p'_\mu}{q'_\mu}$, $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ appartenant au système, quel que soit μ, et les fractions $\frac{p'_{\mu+1}}{q'_{\mu+1}}$ et $\frac{p_{\mu+1}}{q_{\mu+1}}$ étant adjacentes entre elles.

Les fractions $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ vont en *croissant* avec μ; comme les fractions du système sont en nombre limité, et que la plus grande d'entre elles est égale à l'unité (il peut y en avoir plusieurs égales à l'unité), il arrivera nécessairement que, pour une certaine valeur de μ, la fraction $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera égale à 1; si nous désignons cette valeur par m, nous aurons

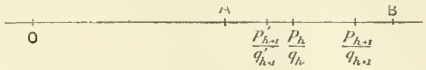
$$(15) \qquad \frac{p'_m}{q'_m} = \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} < \frac{p_m}{q_m} = 1,$$

les fractions $\frac{p'_m}{q'_m}$ et $\frac{p_m}{q_m}$ étant adjacentes.

Il s'agit maintenant de faire voir que l'ensemble des fractions

$$(16) \qquad \frac{p'_\mu}{q'_\mu}, \quad \frac{p_\mu}{q_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

constitue un système complet. Pour cela, il suffit de montrer que, quel que soit h, l'ensemble des intervalles canoniques relatifs à celles des fractions (16) pour lesquelles μ est inférieur ou égal à h recouvre complètement l'intervalle compris entre 0 et $\frac{p_h}{q_h}$. Cette proposition est vraie pour $h = 1$, car alors cet intervalle se réduit au seul point 0; il suffit donc de montrer que, si la proposition est vraie pour une valeur de h, elle subsiste pour la valeur immédiatement supérieure $h + 1$.



Or ceci est évident pour peu qu'on y réfléchisse et devient intuitif par une figure; les intervalles canoniques relatifs à $\frac{p'_{h+1}}{q'_{h+1}}$ et $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$ étant adjacents recouvrent complètement un segment AB tel que A est à gauche de $\frac{p_{h+1}}{q'_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui) et, par suite, à gauche de $\frac{p_h}{q_h}$, B étant à droite de $\frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}$ (non coïncidant avec lui). Si donc on adjoint ces intervalles aux intervalles $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, h$), lesquels sont supposés recouvrir entièrement l'intervalle $\left(0, \frac{p_h}{q_h}\right)$, on recouvrira

complètement l'intervalle $\left(0, \frac{p_{h+1}}{q_{h+1}}\right)$, en débordant même au delà des extrémités. Il suffit de faire croître le nombre h jusqu'à la valeur m pour avoir le théorème V.

14. Nous allons maintenant former effectivement des systèmes complets de fractions; on en obtient une infinité par le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Si l'on désigne par* A *et* B *deux nombres positifs assujettis aux deux conditions* $\begin{cases} B > 15A^2, \\ A > 10. \end{cases}$ *les fractions dont le dénominateur est compris entre* A *et* B *constituent un système complet.*

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuierons sur le théorème V; pour chaque fraction $\frac{p}{q}$ de l'ensemble, nous démontrerons l'existence de fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{v}{w}$ de l'ensemble satisfaisant aux conditions du théorème V; pour cela, nous distinguerons deux cas généraux suivant que $\frac{p}{q}$ est irréductible ou non; chacun de ces cas se subdivisera d'ailleurs en plusieurs suivant la valeur relative de q par rapport à A et B.

PREMIER CAS. — *La fraction* $\frac{p}{q}$ *est irréductible.*

1° *L'on suppose* $3q < B$. Nous prendrons alors

$$\frac{v}{w} = \frac{p}{q};$$

(le signe = signifiant que l'on a : $v = p$; $w = q$); quant à la fraction $\frac{r}{s}$, nous la déterminerons comme il suit : soient α et β *les deux nombres inférieurs à* $\frac{p}{q}$ *et tels que l'on ait*

$$p\beta - q\alpha = -1$$

(on peut dire aussi que $\frac{\alpha}{\beta}$ est l'avant-dernière réduite du développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue; $\frac{p}{q}$ est la dernière).

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = -1,$$

on prendra

$$r = 2p + \alpha,$$
$$s = 2q + \beta,$$

et l'on aura

$$(17)\quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{2p+\alpha}{2q+\beta} - \frac{p}{q} = \frac{q\alpha - p\beta}{q(2q+\beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

car $\frac{s}{q}$ est supérieur à 2 et, par suite, supérieur à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; on a d'ailleurs

$$s < 3q < \mathrm{B};$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait donc aux conditions requises.

Si l'on a

$$p\beta - q\alpha = +1,$$

on prendra

$$r = 3p - \alpha,$$
$$s = 3q - \beta,$$

et l'on aura

$$(18)\quad \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{3p-\alpha}{3q-\beta} - \frac{p}{q} = \frac{p\beta - q\alpha}{q(3q-\beta)} = \frac{1}{qs} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right),$$

car on a encore

$$\frac{s}{q} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad s < 3q < \mathrm{B};$$

la fraction $\frac{r}{s}$ satisfait encore aux conditions requises.

2° *L'on suppose* $3q > \mathrm{B}$, *c'est-à-dire* $q > \frac{\mathrm{B}}{3}$. Nous pouvons déve-

lopper alors $\frac{p}{q}$ en fraction continue limitée,

$$\frac{p}{q} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n}}}},$$

en nous arrangeant, comme il a été expliqué plus haut, de manière que le nombre des quotients incomplets soit pair; désignons par

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2}{1 + a_1 a_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q},$$

les réduites de cette fraction continue; nous considérerons les trois dernières réduites

$$\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}, \qquad \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q},$$

et nous supposerons d'abord que q_{2n-2} et q_{2n-1} sont supérieurs à Λ.

D'après ce que nous avons vu, ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes, nous prendrons alors

$$\frac{v}{w} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}},$$

ou bien $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$ sont adjacentes, dans ce cas nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}};$$

dans les deux cas, on voit visiblement que les conditions requises sont vérifiées.

Il reste à étudier le cas où les nombres q_{2n-1} et q_{2n-2} ne sont pas tous deux supérieurs à Λ.

Supposons d'abord

$$q_{2n-1} > \Lambda > q_{2n-2}.$$

Écrivons la relation fondamentale

$$(19) \qquad q_{2n} = a_{2n-1} q_{2n-1} + q_{2n-2}.$$

Dans le cas où a_{2n-1} est supérieur à 1, on a

$$\frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et les fractions $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$ sont adjacentes; on prendra alors

$$\frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \qquad \text{et} \qquad \frac{v}{w} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}.$$

Supposons maintenant

$$a_{2n-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-2}, \tag{20}$$

on a, de plus,

$$q_{2n} > \frac{B}{3}; \tag{21}$$

$$q_{2n-2} < A. \tag{22}$$

Désignons par ρ le plus petit nombre entier, tel que ρq_{2n-2} soit supérieur à A; on aura

$$\rho q_{2n-2} > A \geqq (\rho - 1) q_{2n-2}. \tag{23}$$

Posons

$$\frac{r}{s} = \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}, \qquad \frac{v}{w} = \frac{\rho p_{2n-2}}{\rho q_{2n-2}}. \tag{24}$$

Nous aurons

$$\frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n-2}} = \frac{\rho}{sw}; \tag{25}$$

or on a, d'après (20), (21), (22), (23), (24),

$$s > \frac{B}{3} - A,$$

$$\rho - 1 \leqq \frac{A}{q_{2n-2}} \leqq A,$$

$$w = \frac{\rho}{\rho - 1}(\rho - 1) q_{2n-2} \leqq \frac{\rho}{\rho - 1} A \leqq 2A,$$

donc

$$(26)\qquad \frac{\rho w}{s} = \frac{2A(A+1)}{\frac{B}{3} - A} < \frac{1}{\sqrt{5}},$$

car cette dernière inégalité revient à

$$B > 3\left[A + 2\sqrt{5}(A^2 + A)\right],$$

et elle est certainement vérifiée si l'on suppose $B > 15A^2$, au moins pour $A > 10$. Or la relation (26) peut s'écrire

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{w^2},$$

d'où, *a fortiori*,

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

Donc, d'après (25), les fractions $\frac{r}{s}$ et $\frac{v}{w}$ sont adjacentes.

Il reste à examiner le cas où l'on a

$$q_{2n-1} < A.$$

Nous désignerons alors par ρ le nombre entier tel que

$$\rho q_{2n-1} > A \geq (\rho - 1) q_{2n-1},$$

et nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{\rho p_{2n-1}}{\rho q_{2n-1}}.$$

Il viendra, comme tout à l'heure,

$$\frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{\rho}{sw},$$

$$\rho - 1 \leq A,$$

$$s \leq 2A,$$

$$w > \frac{B}{3} - A,$$

$$\frac{\rho s}{w} < \frac{2A(A+1)}{\frac{B}{3} - A} < \frac{1}{\sqrt{5}};$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho}{sw} < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{s^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{w^2}\right).$$

Les cas où $\frac{p}{q}$ est irréductible sont ainsi complètement examinés.

Deuxième cas. — *La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.*

Soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible équivalente à $\frac{p}{q}$; si $Q > A$, nous savons faire correspondre à cette fraction $\frac{P}{Q}$ deux fractions $\frac{v}{w}$ et $\frac{r}{s}$; il est clair que nous pouvons faire correspondre les mêmes à $\frac{p}{q}$. Il reste à examiner le cas où Q est inférieur à A; nous désignerons alors par ρ le nombre entier tel que l'on ait

$$\rho Q > A \geqq (\rho - 1)Q,$$

et nous prendrons

$$\frac{v}{w} = \frac{\rho P}{\rho Q} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{r}{s} = \frac{3\rho^2 PQ + 1}{3\rho^2 Q^2}.$$

Nous aurons

$$\frac{r}{s} - \frac{v}{w} = \frac{1}{3\rho^2 Q^2} = \frac{1}{3w^2} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{1}{s^2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$s = 3\rho^2 Q^2 < \frac{3\rho^2}{(\rho - 1)^2} A^2 \leqq 12 A^2 < B,$$

donc s et w sont bien compris dans l'intervalle A, B.

Le théorème VI est ainsi complètement démontré.

L'approximation des nombres incommensurables par les nombres rationnels.

15. Le théorème VI entraîne immédiatement la conséquence suivante :

THÉORÈME VII. — *Soient α un nombre réel quelconque et* A *et* B *des nombres réels vérifiant les inégalités*

$$A > 10,$$
$$B > 15A^2,$$

on peut trouver deux nombres entiers p et q tels que l'on ait

$$A < q < B,$$
$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{q^2}.$$

Ce théorème paraît devoir être particulièrement utile dans le cas où l'on veut approcher simultanément de plusieurs nombres (incommensurables ou non) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: on peut alors, quels que soient les nombres A et B satisfaisant aux inégalités précédentes, trouver des entiers $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_n, q_n$ tels que l'on ait

$$A < q_1 < B, \qquad \left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}},$$
$$A < q_2 < B, \qquad \left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A < q_n < B, \qquad \left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha_n\right| < \frac{1}{q_n^2\sqrt{5}}.$$

16. On peut arriver à un résultat plus précis que le précédent par une méthode que nous nous contenterons d'exposer brièvement dans le cas de *deux* nombres α_1, α_2.

Soient A et B deux nombres vérifiant les inégalités

$$A > 100,$$
$$B > 15A^2,$$

on peut trouver deux nombres entiers p_1 et q_1, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}},$$
$$A < q_1 < B.$$

Déterminons maintenant deux nombres positifs, supérieurs à 1, A_1 et B_1 vérifiant les inégalités

$$\log A_1 \log B_1 = 2\log q_1,$$
$$B_1 = 15A_1^2,$$

on aura, de plus, visiblement

$$A_1 > 10,$$

de sorte que l'on pourra affirmer qu'il existe des nombres entiers p_2 et q_2, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}},$$
$$A_1 < q_2 < B_1.$$

Il est manifeste que l'on a

$$\frac{\log A_1}{\log q_1} = \frac{\log q_1}{\log B_1} = \sqrt{\frac{\log A_1}{\log B_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\log 15}{2\log A_1}}}.$$

Cette expression diffère aussi peu que l'on veut de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, quand on suppose A_1 assez grand. On peut donc énoncer le résultat obtenu sous la forme suivante :

Théorème VII *bis*. — *Soient α_1 et α_2 deux nombres réels quel-*

conques, ε un nombre positif arbitrairement petit, on peut trouver des entiers p_1, q_1, p_2, q_2, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - \alpha_1\right| < \frac{1}{q_1^2\sqrt{5}},$$

$$\left|\frac{p_2}{q_2} - \alpha_2\right| < \frac{1}{q_2^2\sqrt{5}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon < \frac{\log q_1}{\log q_2} < \sqrt{2} + \varepsilon.$$

17. On peut se placer à un point de vue différent et chercher à approcher simultanément de plusieurs nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ par des fractions de *même dénominateur*. Le résultat fondamental suivant est dû à Charles Hermite [1]: on peut trouver des entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$, tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| < \frac{\rho_n}{q^{\frac{1}{n+1}}};$$

la constante ρ_n ne dépendant que de n. Nous avons vu que l'on peut prendre, d'après M. Hurwitz,

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et que l'on ne peut pas prendre

$$\rho_1 < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 40, p. 266.

Pour $n > 1$, M. Minkowski a montré [1] que l'on peut prendre

$$\rho_n = \frac{n}{n+1}.$$

Nous reviendrons sur le théorème d'Hermite; mais il nous faut d'abord démontrer une proposition fondamentale sur les ensembles à n dimensions.

Théorème fondamental sur la mesure des ensembles à n dimensions.

18. Nous donnerons le nom de *point* à tout système de valeurs *réelles* des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; un ensemble de tels points sera dit un *ensemble à n dimensions*. La distance de deux points x, y est la quantité *positive* r définie par la relation

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2.$$

Au lieu de la distance, il est indifférent de considérer soit la somme

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_n - y_n|,$$

que M. Jordan appelle l'*écart*, soit le plus grand des termes de cette somme que M. Minkowski appelle *spanne*. Un ensemble est dit *borné* lorsqu'il existe un nombre B tel que la distance de tous ses points à un point fixe convenablement choisi soit inférieure à B. Un point y est point limite d'un ensemble E lorsqu'il y a dans E des points x dont la distance à y est inférieure à un nombre arbitraire ε.

L'ensemble des points limites d'un ensemble E constitue l'*ensemble dérivé* E'; les points qui n'appartiennent pas à E constituent l'*ensemble complémentaire de* E que l'on désignera par C(E), dont l'ensemble dérivé sera désigné par C'(E). Enfin, on appelle *frontière*

---

[1] *Geometrie der Zahlen*, p. 112. Nous écrivons ρ_n là où M. Minkowski écrit ρ_{n+1}.

de E l'ensemble des points communs à E et C(E) d'une part, à E et C'(E) d'autre part, et points *intérieurs* à E les points de E qui n'appartiennent pas à sa frontière. L'ensemble E est dit *fermé* lorsqu'il contient tous les points de l'ensemble dérivé E'.

19. Ces définitions étant rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant [1] :

THÉORÈME VIII. — *Soit* E *un ensemble borné et fermé donné,* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$ *une infinité dénombrable* [2] *d'ensembles tels que tout point de* E *soit* INTÉRIEUR *à, au moins, l'un d'eux; il est possible de trouver, parmi* $E_1, E_2, \ldots, E_p, \ldots$, *un nombre* LIMITÉ *d'ensembles tels que tout point de* E *soit intérieur à, au moins, l'un d'eux.*

Il suffit de prouver qu'il existe un nombre fini M, tel que tout point de E soit *intérieur* à un E_j, tel que $j < M$. Or, nier l'existence de M, c'est affirmer que, *quel que soit le nombre* A, *il existe dans* E *au moins un point* x *tel que tous les* E_i *qui renferment* x *à leur intérieur soient tels que* $i > A$. Si l'on décompose l'ensemble E en un nombre limité d'autres ensembles, il y en aura au moins un ayant la même propriété.

L'ensemble E étant borné, il existe un nombre positif B tel que l'on ait, pour tout point de E,

$$|x_i| < B \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

(1) J'ai énoncé ce théorème pour le cas des ensembles linéaires ($n = 1$) dans ma Thèse (*Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1894); j'en ai donné dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions* une démonstration qui s'étend immédiatement au cas de n dimensions (c'est cette extension qui est donnée dans le texte). Dans sa Thèse (*Intégrale, longueur, aire*, publiée dans les *Annali di Mathematica*), M. Lebesgue a fait d'importantes applications de ce théorème et de sa généralisation; *voir* aussi son Cours cité au bas de la page 335.

Le théorème est énoncé et démontré ici pour le cas d'un ensemble borné et fermé quelconque.

(2) On pourrait supprimer le mot *dénombrable* sans que l'énoncé cessât d'être exact; je dois cette remarque à M. Lebesgue. Mais nous n'avons besoin ici que de l'énoncé du texte, un peu plus aisé à démontrer.

Soit j un nombre entier quelconque; considérons l'ensemble $E^{(j)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ formé *des points de* E dont les coordonnées vérifient les inégalités

$$(E^{(j)}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1 B}{2^j} \leqq x_1 \leqq \dfrac{(\alpha_1 + 1) B}{2^j}, \\ \dfrac{\alpha_2 B}{2^j} \leqq x_2 \leqq \dfrac{(\alpha_2 + 1) B}{2^j}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\alpha_n B}{2^j} \leqq x_n \leqq \dfrac{(\alpha_n + 1) B}{2^j}; \end{array} \right.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des entiers positifs ou négatifs tels que $|\alpha_h|$ et $|\alpha_h + 1|$ soient inférieurs à 2^j.

Parmi les ensembles en nombre limité $E^{j}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$, il y en a, comme nous l'avons dit, au moins un qui a la même propriété que E; nous le désignerons par $E^{(j)}$ (s'il y en a plusieurs, nous choisissons l'un d'eux). Si l'on remplace j par $j + 1$, on peut choisir $E^{(j+1)}$ de telle manière que tous les points intérieurs à E^{j+1} soient intérieurs à E^j, et ainsi de suite. On forme ainsi une suite indéfinie

$$(\alpha) \qquad E, \quad E^{(1)}, \quad E^{(2)}, \quad \ldots, \quad E^{(h)}, \quad \ldots$$

ayant les propriétés suivantes :

1° *Tout point intérieur à l'un de ces ensembles est intérieur aux précédents;*

2° *La distance maximum de deux points de* $E^{(h)}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{h}$;

3° *Quels que soient* A *et* h, *il existe un point* x *intérieur à* $E^{(h)}$ *et tel que tous les* E_i *auxquels* x *est intérieur soient tels que* $i > A$.

Or, la propriété 1° entraîne l'existence d'un point x intérieur à tous les $E^{(h)}$; ce point x appartient à E, puisque E est fermé; par suite, il est *intérieur* à un ensemble déterminé E_i; on en conclut qu'il existe un nombre δ tel que tous les points, dont la distance à x est inférieure à δ, appartiennent à E_i [sinon il y aurait des points de $C(E_i)$ aussi voisins que l'on veut de x: x appartiendrait à $C'(E_i)$ et, par suite, à la fron-

tière de E_i; il ne serait pas *intérieur* à E_i]; d'après 2°, quelque petit que soit δ, il existe un nombre k tel que la distance de deux points quelconques de E^k soit inférieure à δ; comme x est intérieur à E^k, on peut affirmer que tous les points de E^k sont *intérieurs* à E_i, ce qui est en contradiction avec la condition 3°.

Le théorème VIII est donc démontré.

Ce théorème peut aisément être étendu aux ensembles non bornés, moyennant quelques conventions. Bornons-nous au cas de deux dimensions, pour plus de simplicité; nous dirons qu'un ensemble est *borné au sens projectif* (ou *borné* P) lorsqu'il est possible de le transformer en un ensemble borné par une transformation homographique convenable. On définira de même un ensemble *fermé au sens projectif* (ou *fermé* P), et aussi ce que l'on doit entendre par points *intérieurs* à un ensemble qui s'étend à l'infini (ou définit les ensembles dérivés, les frontières, etc.). Avec ces définitions, le théorème VIII subsiste évidemment si l'on suppose l'ensemble E *borné* P *et fermé* P au lieu de le supposer simplement borné et fermé.

Or, il est clair que l'on peut déterminer trois ensembles bornés P et fermés P, tels que tout point du plan appartienne à, au moins, l'un d'eux. Il suffit, en effet, de les définir, par exemple, par les relations

$$2x^2 - y^2 - z^2 = 0,$$
$$2y^2 - x^2 - z^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0,$$

x, y, z étant des coordonnées trilinéaires quelconques. Si l'on applique à chacun de ces ensembles le théorème VIII généralisé on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME VIII *bis*. — *Si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, *tels que tout point du plan soit* INTÉRIEUR *à, au moins, l'un d'eux (les points à l'infini non exclus, bien entendu), on peut déterminer parmi les* E_i *un nombre limité d'ensembles tels que tout point du plan soit intérieur à l'un d'eux.*

Il est clair que l'on pourrait utiliser d'autres transformations que les

transformations projectives; il y aurait seulement lieu de tenir compte de l'existence des points singuliers des transformations. Ce qui précède s'étend d'ailleurs immédiatement au cas de n dimensions. Nous verrons plus loin l'usage que l'on peut faire de certaines transformations non ponctuelles; il est clair que l'on pourrait utiliser dans la théorie des ensembles toutes les transformations géométriques, et, en particulier, les transformations de contact; mais il ne paraît y avoir intérêt à développer cette indication que si l'on trouve des applications.

20. Revenons aux ensembles bornés et au théorème VIII; nous allons en établir une conséquence importante qui s'en déduit immédiatement. Donnons le nom de *domaine* à tout ensemble *borné et fermé* défini par un nombre limité d'inégalités *algébriques* (¹) de la forme

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0.$$

Le volume d'un domaine est l'intégrale

$$V = \int\int\cdots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

étendue aux points intérieurs, telle qu'on la définit dans les éléments; cette intégrale est toujours positive; le volume d'un domaine formé par la réunion de plusieurs autres est la somme de leurs volumes. Cela posé, la conséquence dont nous voulions parler est la suivante :

Théorème IX. — *Lorsqu'un domaine* E *est tel que chacun de ses points est intérieur à un domaine* E_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, *on peut affirmer que la somme des volumes des domaines* E_i *est supérieure au volume de* E. Bien entendu, si la série $\sum v_i$, v_i étant le volume de E_i, est divergente, sa somme est regardée comme infinie et supérieure à tout nombre positif.

(¹) On pourrait adopter pour le domaine une définition bien plus large; nous n'en aurons pas besoin.

On peut donner à cet énoncé une forme quelquefois plus commode.

THÉORÈME IX *bis*. — *Étant donné un domaine* E *et une infinité dénombrable de domaines*

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots,$$

tels que l'on ait

$$\sum v_i < v,$$

v_i *étant le volume de* E_i *et* v *le volume de* E, *on peut affirmer qu'il y a des points de* E *qui ne sont intérieurs à aucun des* E_i.

21. L'énoncé précédent n'exclut pas le cas où tout point de E appartiendrait à l'un des E_i (mais pourrait être point frontière). On peut observer qu'étant donné un domaine quelconque E_i et un nombre positif arbitraire ε, on peut construire un domaine E'_i, tel que :

1° Tout point de E_i soit *intérieur* à E'_i;

2° L'on ait

$$v'_i = (1 + \varepsilon) v_i,$$

v_i étant le volume de E_i et v'_i celui de E'_i.

Or si l'on a

$$\sum v_i < v,$$

on peut choisir ε de telle manière que l'on ait aussi

$$(1 + \varepsilon) \sum v_i < v,$$

c'est-à-dire

$$\sum v'_i < v,$$

et l'on peut conclure qu'il y a des points de E qui ne sont intérieurs à aucun des E'_i et qui, par suite, n'appartiennent à aucun des E_i.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME X. — *Étant donné un domaine* E, *de volume* v, *et une*

infinité dénombrable de domaines E_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ *de volumes* v_i, *et tels que*

$$\sum v_i < v,$$

il existe des points de E *qui n'appartiennent à aucun des* E_i

22. Les théorèmes IX et X entraînent, comme on le voit aisément, les conséquences suivantes :

Théorème XI. — *Soit* E *un domaine et* $E_1, E_2, \ldots, E_h, \ldots$ *des domaines tels que tout point de* E *soit intérieur à une infinité d'entre eux; on peut affirmer que les volumes* $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots$ *de ces domaines sont tels que la série*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_h + \ldots$$

est divergente.

Théorème XI *bis*. — *Soient* $E_1, E_2, \ldots, E_h, \ldots$ *des domaines de volumes* $v_1, v_2, \ldots, v_h, \ldots$ *tels que la série*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_h + \ldots$$

soit convergente; on peut affirmer que l'ensemble H *des points qui appartiennent à une infinité de ces domaines est tel que, étant donné un nombre arbitrairement petit* ε, *on peut construire des domaines* $H_1, H_2, \ldots, H_\alpha, \ldots$ *en nombre fini ou en infinité dénombrable, tels que tout point de* H *soit intérieur à l'un d'eux et que, de plus,* v_α *étant le volume de* H_α, *l'on ait*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\alpha + \ldots < \varepsilon.$$

L'approximation par des fractions de même dénominateur.

23. Considérons l'ensemble des points dont les coordonnées s'expriment par les formules

$$(\mathrm{P}) \qquad x_1 = \frac{p_1}{q}, \qquad x_2 = \frac{p_2}{q}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{p_n}{q},$$

dans lesquelles q est un nombre entier positif, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers satisfaisant aux inégalités

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} 0 \leq p_1 < q, \\ 0 \leq p_2 < q, \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \leq p_n < q. \end{array}\right.$$

Tous ces points sont intérieurs au domaine E défini par les inégalités : $0 < x_1 < 1$; ...; $0 < x_n < 1$; le volume de E est visiblement égal à 1.

Les points (P) peuvent être rangés en une suite simplement infinie (*voir* n° **7**); désignons par P_h le point (P) qui occupe le rang h dans cette suite et à chaque point $P_h\left(\frac{p_1}{q}, \frac{p_2}{q}, \ldots, \frac{p_n}{q}\right)$ faisons correspondre le domaine E_h défini par les inégalités :

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{p_1}{q} - \frac{a}{q^\alpha} < x_1 < \frac{p_1}{q} + \frac{a}{q^\alpha}, \\ \frac{p_2}{q} - \frac{a}{q^\alpha} < x_2 < \frac{p_2}{q} + \frac{a}{q^\alpha}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{p_n}{q} - \frac{a}{q^\alpha} < x_n < \frac{p_n}{q} + \frac{a}{q^\alpha}; \end{array}\right.$$

a et α étant des nombres positifs, dont le second est supposé plus grand que un.

Le volume du domaine E_h est évidemment

$$v_h = \frac{2^n a^n}{q^{n\alpha}}.$$

D'ailleurs, le nombre des E_h ayant ce volume est égal au nombre des systèmes de valeurs de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui satisfont aux inégalités (27), c'est-à-dire à

$$(q-1)^n.$$

On a donc

$$\sum v_h = 2^n a^n \sum \frac{(q-1)^n}{q^{n\alpha}}$$

Pour que cette série converge, il faut et il suffit que l'on ait

$$n\alpha > n + 1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha > \frac{n+1}{n}. \tag{29}$$

Le théorème XI *bis* entraîne alors la conséquence suivante :

Théorème XII. — *Le nombre α satisfaisant à l'inégalité* (29) *et le nombre a étant quelconque, on peut affirmer que l'ensemble* E *des points, dont les coordonnées vérifient les inégalités*

$$0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_n \leqq 1,$$

renferme des points qui ne sont intérieurs qu'à un nombre limité des domaines E_k *définis par les inégalités* (28).

Ce théorème peut, en un certain sens, être regardé comme la réciproque de la célèbre proposition d'Hermite que nous rappelions tout à l'heure; on peut, en effet, lui donner la forme suivante :

Théorème XII *bis*. — *Le nombre positif a étant quelconque et le nombre α supérieur à $\frac{n+1}{n}$, il existe une infinité de systèmes de n nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tels qu'à chacun de ces systèmes corresponde un nombre Q tel que l'inégalité, dans laquelle q désigne un entier*

$$q > Q$$

entraîne

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$

$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| > \frac{a}{q^\alpha},$$

quels que soient d'ailleurs les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Le théorème d'Hermite nous apprenait que, si α est égal à $\frac{n-1}{n}$, on peut prendre pour a une valeur telle qu'il n'existe pas de nombre Q ayant cette propriété.

Il est clair que la réciproque précédente est loin d'être aussi précise que celle que M. Hurwitz a déduite de la théorie des fractions continues dans le cas où $n = 1$; il nous a cependant paru intéressant de la signaler.

24. Conservant les mêmes notations, supposons maintenant que l'on ait

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{n-1}{n}, \\ a &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}\right.$$

On peut faire alors la remarque suivante :

Étant donné un système quelconque de nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il existe une infinité de systèmes d'entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ tels que l'on ait

$$\left|\frac{p_1}{q} - \alpha_1\right| < \frac{a}{q^2},$$

$$\left|\frac{p_2}{q} - \alpha_2\right| < \frac{a}{q^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\frac{p_n}{q} - \alpha_n\right| < \frac{a}{q^2}.$$

Il existe, en effet, au moins un tel système, comme nous l'avons rappelé (p. 355).

Dans le cas où les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ne sont pas tous rationnels, les différences $\frac{p_1}{q} - \alpha_1, \frac{p_2}{q} - \alpha_2, \ldots, \frac{p_n}{q} - \alpha_n$ ne sont pas toutes nulles et le maximum μ de leurs valeurs absolues n'est pas nul; or, d'après le théorème que nous avons rappelé, on peut déterminer des entiers

$p'_1, p'_2, \ldots, q'$ tels que les différences

$$\frac{p'_1}{q'} - \alpha_1, \quad \frac{p'_2}{q'} - \alpha_2, \quad \ldots, \quad \frac{p'_n}{q'} - \alpha_n$$

soient en valeur absolue inférieures à μ tout en satisfaisant aux inégalités du type

$$\left| \frac{p'_i}{q'} - \alpha_i \right| < \frac{\mu}{q'^{\alpha}},$$

les nombres $p'_1, p'_2, \ldots, q'$ sont donc nécessairement distincts de $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$.

Si les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont tous rationnels, on peut déterminer des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ tels que l'on ait

$$\frac{p_1}{q} - \alpha_1 = 0, \quad \frac{p_2}{q} - \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{p_n}{q} - \alpha_n = 0,$$

et le raisonnement précédent ne s'applique plus.

Mais il est manifeste que l'on a, quel que soit l'entier h,

$$\frac{p_1 h}{qh} - \alpha_1 = 0, \quad \frac{p_2 h}{qh} - \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{p_n h}{qh} - \alpha_n = 0.$$

Notre remarque est donc justifiée; on peut encore l'énoncer en disant que les relations (30) entraînent la conséquence que tout point de E est intérieur à *une infinité* des domaines E_h définis par les relations (28).

On en conclut, d'après le théorème VIII, qu'il est possible de choisir parmi les E_h, un nombre limité de domaines $E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_q}$, tels que tout point de E soit intérieur à, au moins, l'un d'eux. Si l'on considère l'ensemble des E_h dont l'indice est différent de $h_1, h_2, \ldots, h_q$, on peut affirmer que tout point de E est encore intérieur à une infinité d'entre eux, de telle sorte que l'on peut encore en déterminer un nombre limité $E_{h'_1}, E_{h'_2}, \ldots, E_{h'_q}$, *distincts des précédents* et tels que tout point de E soit intérieur à l'un d'entre eux. On peut continuer de même indéfiniment et l'on arrive ainsi au résultat suivant :

Théorème XIII. — *Si l'on considère l'ensemble des systèmes de*

n fractions de même dénominateur :

$$\frac{p_1}{q},\quad \frac{p_2}{q},\quad \ldots,\quad \frac{p_n}{q}\qquad (q = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$0 \leq p_1 < q,\qquad 0 \leq p_2 < q,\qquad \ldots,\qquad 0 \leq p_n < q;$$

il est possible de classer cette infinité de systèmes de n fractions en une infinité de classes, chaque classe ne renfermant qu'un nombre limité de systèmes, et deux classes distinctes ne renfermant pas de systèmes identiques (c'est-à-dire de systèmes formés de n fractions identiques deux à deux, dans le même ordre), cette classification ayant la propriété suivante : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant n nombres réels quelconques compris entre 0 et 1, il y a, dans chaque classe, un système au moins donnant lieu aux inégalités

$$\left|\frac{p_i}{q} - \alpha_i\right| < \frac{n}{n+1}\,\frac{1}{q^{\frac{n+1}{n}}}\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas où $n = 1$, nous avons *effectivement* obtenu une classification ayant les propriétés indiquées dans cet énoncé; dans le cas général, nous nous contentons de démontrer la *possibilité* d'une telle classification; il serait intéressant de l'obtenir aussi effectivement.

Les formes linéaires à indéterminées entières.

23. Des méthodes analogues aux précédentes s'appliquent à l'étude des formes linéaires à indéterminées entières et à coefficients quelconques. Pour ne pas allonger démesurément, je me bornerai à quelques indications sur ce sujet, en prenant comme exemple une forme *unique* à *trois* variables; je me réserve d'y revenir ultérieurement.

Considérons la forme linéaire

$$\zeta = ax + by + cz,$$

dans laquelle a, b, c sont des nombres réels donnés quelconques et x, y, z des indéterminées entières.

Considérons deux axes rectangulaires OX, OY et la droite représentée par l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad aX + bY + c = 0.$$

La distance d du point

$$\mathrm{P}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

à la droite (D) est donnée par la formule

$$(31) \qquad d = \frac{a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\varphi}{z\sqrt{a^2 + b^2}},$$

formule fondamentale que l'on peut écrire aussi sous la forme

$$\varphi = dz\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le point P est un point quelconque à coordonnées rationnelles; on voit que la recherche des plus petites valeurs que peut prendre la forme φ pour des valeurs entières des variables est intimement liée à la recherche des points (P) à coordonnées rationnelles dont la distance à la droite (D) est très petite par rapport à $\frac{1}{z}$.

Relativement aux plus petites valeurs de la forme φ, on déduit immédiatement des méthodes classiques de Lejeune-Dirichlet la proposition suivante :

Si l'on pose

$$\psi = ax + by + z,$$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \qquad (h > 0)$$

et que l'on désigne par M *un nombre quelconque, on peut déterminer des valeurs entières de* x, y, z *telles que l'on ait*

$$|x| < \mathrm{M}, \qquad |y| < \mathrm{M}, \qquad |z| < \mathrm{M},$$

$$|\psi| < \frac{\theta h}{\mathrm{M}^2},$$

θ *étant une constante déterminée, indépendante de* a, b, M.

Nous ne nous occuperons pas de la détermination effective de θ; on peut y arriver par la méthode rappelée ou employer les méthodes analogues, mais plus générales, de M. Minkowski, qui fourniraient une valeur plus petite.

On peut aussi écrire l'inégalité précédente

$$\left|\frac{y}{z}\right| < \frac{\theta h}{z^2}$$

et énoncer le théorème suivant :

Il existe une infinité de systèmes de valeurs entières x, y, z telles que l'on ait

$$|ax + by + z| < \frac{\theta\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{z^2},$$

les constantes a, b étant quelconques et θ étant une constante indépendante de a et b.

Pour démontrer ce théorème, on distingue deux cas suivant qu'il existe ou non des valeurs entières x, y, z annulant $ax + by + z$ et l'on raisonne comme au n° **24**.

Si l'on utilise la formule (31), on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donnée une droite quelconque

$$(\mathrm{D}) \qquad aX + bY + 1 = 0,$$

il existe une infinité de systèmes de trois nombres entiers x, y, z, tels que la distance (essentiellement positive) d du point $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ à la droite (D) vérifie l'inégalité

$$d < \frac{\theta}{z^2}\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

On peut donner à ce résultat une forme plus géométrique.

Dans ce but, remarquons que la distance de l'origine à la droite

$$aX + bY + 1 = 0$$

est $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$; d'autre part, la distance de l'origine à un point $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ de cette droite est $\sqrt{\frac{X^2+Y^2}{Z^2}}$; on a donc

$$\frac{X^2+Y^2}{Z^2} > \frac{1}{a^2+b^2},$$

$$\frac{a^2+b^2+1}{a^2+b^2} = 1 + \frac{1}{a^2+b^2} < 1 + \frac{X^2+Y^2}{Z^2} = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{Z^2}.$$

On peut donc (en modifiant légèrement la valeur de θ pour tenir compte du fait que le point $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ n'est pas sur la droite, mais en est voisin) écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$d < \frac{\theta\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z^2}.$$

Ceci posé, attachons *à chaque système de deux fractions de même dénominateur* $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ le cercle qui a pour centre le point de coordonnées $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ et pour rayon $\frac{\theta\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z^2}$; nous appellerons ce cercle *le cercle* $C(x, y, z)$ ou *cercle attaché aux fractions* $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ [à un point de coordonnées rationnelles correspondent évidemment tous les cercles $C(x, y, z)$ tels que l'on ait $x = \lambda p$, $y = \lambda q$, $z = \lambda r$, p, q, r étant des entiers convenablement choisis et λ un entier arbitraire]; nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème XIV. — *Toute droite du plan coupe une infinité de cercles* $C(x, y, z)$.

Ce théorème n'est qu'une simple transformation de résultats clas-

siques; nous en déduirons des résultats nouveaux, mais il est d'abord nécessaire d'entrer dans quelques détails au sujet des ensembles de droites.

26. Étant donné un ensemble de droites dans un plan, nous dirons que cet ensemble est borné lorsqu'il existe un nombre A tel que la distance d'un certain point fixe à toutes les droites de l'ensemble soit inférieure à A.

Nous dirons qu'un ensemble *borné* est *simple* lorsqu'il existe un cercle tel que l'ensemble des points, pôles des droites de l'ensemble par rapport à ce cercle, soit *borné* et *fermé*. Nous ramènerons les ensembles bornés aux ensembles simples au moyen du théorème suivant :

THÉORÈME XV. — *Étant donné un ensemble borné de droites* E, *il est possible de déterminer trois ensembles simples* E_1, E_2, E_3 *tels que toute droite appartenant à* E *appartienne à l'un au moins de ces trois ensembles.*

Traçons, en effet, trois cercles C_1, C_2, C_3 tels qu'il n'existe aucune droite qui coupe ces *trois* cercles; cela est évidemment possible d'une infinité de manières. Désignons par F_i l'ensemble des droites de E qui ne coupent pas le cercle C_i; il est clair que toute droite de E appartient à l'un au moins des ensembles F_1, F_2, F_3. Soit maintenant f_i l'ensemble des pôles des droites de l'ensemble F_i par rapport au cercle C_i, tous les points de f_i sont intérieurs à C_i puisque les droites de F_i ne coupent pas C_i; de plus, l'ensemble F_i étant borné, il existe nécessairement un cercle c_i concentrique à C_i et tel que tous les points de f_i soient extérieurs à c_i. Soient f'_i l'ensemble dérivé de f_i et e_i l'ensemble $f_i + f'_i$; on sait que l'ensemble e_i est parfait; les points de cet ensemble sont nécessairement intérieurs à C_i et extérieurs à c_i (ou sur ces cercles); il est donc borné et l'ensemble E_i des droites polaires des points de e_i par rapport à C_i est aussi borné; c'est donc un ensemble *simple;* toute droite de F_i appartient à E_i; si donc on construit de même les ensembles E_2, E_3 au moyen des cercles C_2 et C_3 et des ensembles F_2, F_3, toute droite de E appartiendra à l'un au moins des ensembles simples E_1, E_2, E_3 C. Q. F. D.

Démontrons maintenant la proposition suivante :

THÉORÈME XVI. — *Soient* E *un ensemble simple de droites,* E_1, $E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *une infinité dénombrable de domaines, tels que toute droite de* E *contienne des points intérieurs à l'un d'eux; on peut déterminer un nombre limité de domaines* E_i *tels que toute droite de* E *renferme des points intérieurs à l'un d'eux.*

Soit, en effet, C un cercle tel que les pôles des droites de E par rapport à C forment un ensemble *borné et fermé e* (¹). Construisons les courbes polaires réciproques par rapport à C des courbes qui limitent les domaines $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$: ces courbes définissent certains ensembles de points (²) $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ tels que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite renferme des points *intérieurs* à E_i, soit que son pôle soit INTÉRIEUR à e_i. Tout point de e est *intérieur* à, au moins, l'un des ensembles e_i; il existe donc un nombre limité d'ensembles e_i tel que tout point de e soit intérieur à, au moins, l'un d'eux (théorème VIII); les domaines E_i correspondants, en nombre limité, sont tels que toute droite de E renferme des points intérieurs à l'un d'eux. C. Q. F. D.

D'après le théorème XV, le théorème XVI entraîne immédiatement la conséquence suivante :

THÉORÈME XVI *bis*. — *Soient* E *un ensemble borné de droites,* $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *une infinité dénombrable de domaines tels que toute droite de* E *contienne des points intérieurs à l'un d'eux; on peut déterminer un nombre limité de domaines* E_i *tels que toute droite de* E *renferme des points intérieurs à l'un d'eux.*

(¹) On pourrait simplifier un peu en utilisant le théorème VIII *bis* et les considérations qui sont développées à cette occasion; nous ne nous servons que du théorème VIII.

(²) Les ensembles e_i ne sont généralement pas bornés; comme l'ensemble e est borné, il existe un point O et un nombre A tels que les distances à O de tous les points de e soient inférieures à A; on peut supprimer dans les e_i tous les points dont la distance à O est supérieure à A et appeler encore e_i les ensembles ainsi obtenus.

Il serait aisé d'étendre le théorème au cas où l'ensemble E n'est pas borné; nous n'y insisterons pas.

27. Il suffit de combiner le théorème XIV et le théorème XVI *bis* pour obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME XVII. — *Soit* E *l'ensemble des droites du plan telles que leur distance à l'origine soit inférieure à un nombre quelconque, mais fixe,* A. *On peut déterminer une infinité de systèmes de cercles* $C(x, y, z)$, *chaque système se composant d'un nombre limité de cercles et tels que toute droite de l'ensemble* E *coupe, au moins, un cercle de chaque système.*

Ce théorème peut être énoncé sous une forme purement arithmétique :

THÉORÈME XVII *bis*. — *Soit* A *un nombre positif quelconque, on peut partager l'ensemble des systèmes de trois entiers* x, y, z *en une infinité de classes, chaque classe en renfermant un nombre limité, et telles que,* α, β *étant deux nombres quelconques vérifiant la relation*

$$\alpha^2 + \beta^2 > A^2,$$

il y ait, dans chaque classe, au moins un système x, y, z *donnant lieu à l'inégalité*

$$|\alpha x + \beta y + z| < \frac{\theta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

θ *étant une constante indépendante de* $A, \alpha, \beta, x, y, z$.

28. Nous laissons de côté l'extension des résultats précédents au cas général du système de n formes linéaires à m indéterminées entières.

Relation entre la hauteur et l'approximation. — Conclusion.

29. Il serait aisé d'énoncer à nouveau les divers résultats que nous avons rappelés ou obtenus en faisant intervenir dans les énoncés la *hauteur* ou le *rang* des systèmes d'entiers qui y figurent. Mais il est inutile de faire cette longue énumération pour prévoir le résultat auquel elle conduirait. Ce résultat peut s'énoncer brièvement ainsi : l'approximation que l'on peut obtenir, *en général,* varie en raison inverse de la hauteur ou d'une puissance de la hauteur (suivant la définition que l'on adopte pour la hauteur). Les mots *en général* signifient : lorsque l'on ne fait pas intervenir des nombres incommensurables *spéciaux*, en donnant le nom de *nombres incommensurables spéciaux* à ceux qui donnent une approximation plus rapide que celle qui résulte des théorèmes généraux. Ces nombres incommensurables jouent un grand rôle dans de nombreuses questions d'Analyse [1]; en fait, on n'a aucune raison de croire qu'ils s'introduiraient dans un système *logique,* au sens de M. Drach; on peut même légitimement supposer qu'ils ne s'introduiraient pas. Mais nous ne savons pas actuellement démontrer d'une manière rigoureuse et générale cette hypothèse, qui, si elle était exacte, simplifierait bien des questions d'Analyse.

Le but final des recherches de ce Mémoire et des recherches analogues me paraît être précisément d'exclure les complications introduites par les nombres incommensurables *spéciaux;* de même que le but final des recherches sur les fonctions continues non dérivables ou autres fonctions singulières doit être de montrer que ces fonctions ne s'introduisent pas dans un système *logique;* ces diverses questions ont

---

(1) *Voir,* par exemple, mes Notes *Sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants et les fonctions non analytiques* (*Comptes rendus,* 16 décembre 1895); *Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles* (*Comptes rendus,* 20 février 1899).

d'ailleurs entre elles de grandes analogies [1]. Mais il serait puéril de vouloir exclure *a priori* de l'Analyse ces diverses complications, sous le simple prétexte que ce sont des complications : *car elles se présentent d'elles-mêmes dans l'étude des questions les plus simples*, lorsqu'on ne fait pas d'hypothèse sur la nature arithmétique des constantes numériques introduites; une étude directe en est donc nécessaire.

Paris, avril 1903.

---

[1] Comparer aussi avec la théorie de la croissance *régulière*. *Voir* mes *Leçons sur les fonctions entières*, Notes II et III.

Extrait d'une Lettre de M. **Robert Pech** *à M.* **Jordan.**

Gr. Strehlitz, le 5 septembre 1903.

Je prends la liberté de vous signaler quelques erreurs qui se sont glissées involontairement dans le *Journal de Liouville* de 1858 (2e série, t. III, p. 263). A cette époque-là, M. le Professeur Dr Schröter, à Breslau, a publié l'équation modulaire pour la transformation du 23e degré sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&2(k\lambda)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\,\frac{1-\lambda}{2}}\right)\\
&\quad+2(k_1\lambda_1)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\,\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\,\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)\\
&\quad=\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}-\left(\sqrt[4]{k\lambda}-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\right)\left(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1}\right).
\end{aligned}$$

Cette équation, pour être juste, doit être modifiée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&2(k\lambda)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\,\frac{1-\lambda}{2}}\right)\\
&\quad-2(k_1\lambda_1)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\,\frac{1-\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\,\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)\\
&\quad=\sqrt[4]{k\lambda}-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}+\left(\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\right)\left(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1}\right).
\end{aligned}$$

Si l'on ne veut pas changer ces trois signes, il faut ajouter encore au côté gauche de l'équation le terme $4\sqrt[8]{k\lambda k_1\lambda_1}$; et l'équation prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&2(k\lambda)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1+k}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}}-\sqrt{\frac{1-k}{2}\,\frac{1-\lambda}{2}}\right)\\
&\quad-2(k_1\lambda_1)^{\frac{3}{8}}\left(\sqrt{\frac{1+k_1}{2}\,\frac{1+\lambda_1}{2}}-\sqrt{\frac{1-k_1}{2}\,\frac{1-\lambda_1}{2}}\right)+4\sqrt[8]{k\lambda k_1\lambda_1}\\
&\quad=\sqrt[4]{k\lambda}+\sqrt[4]{k_1\lambda_1}+\left(\sqrt[4]{k\lambda}-\sqrt[4]{k_1\lambda_1}\right)\left(\sqrt{k\lambda}-\sqrt{k_1\lambda_1}\right).
\end{aligned}$$

Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental;

PAR M. LERCH.

Les formes binaires à coefficients entiers

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{ou} \quad (a, b, c),$$

qui appartiennent au même discriminant positif $D = b^2 - 4ac$, se distribuent en un nombre fini de classes que je désigne par $Cl(D)$. Un discriminant est dit *fondamental*, s'il ne lui correspond que des formes primitives, c'est-à-dire sans diviseur commun des coefficients a, b, c. Nous ne considérerons que des discriminants fondamentaux.

D'après les méthodes analytiques de Dirichlet, la détermination du nombre $Cl(D)$ dépend de la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4, \tag{1}$$

c'est-à-dire de la solution composée des plus petits entiers positifs T, U. En désignant par $E(D)$ la quantité

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

j'ai obtenu, en m'appuyant sur les recherches de Dirichlet, la formule suivante [1]

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right.$$

u désignant une quantité positive arbitraire, et le symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)$ ayant la signification habituelle du signe de Legendre, généralisé par Kronecker.

En opérant sur la formule (2) sans aucune modification, les applications numériques seraient encore pénibles. Nous voulons montrer, dans cette Note, que la formule (2) est susceptible d'une modification qui rend facile le calcul du nombre des classes, même si la valeur du discriminant est assez considérable, en supposant, bien entendu, qu'on connaît, avec une certaine approximation, la quantité $\log \mathrm{E}(\mathrm{D})$.

J'introduirai, dans ce but, la quantité

$$(3)\qquad \mathrm{S} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

puis je désignerai par β les entiers 1, 2, 3. . . . qui satisfont à l'une ou l'autre équation

$$(4)\qquad \left(\frac{\mathrm{D}}{\beta}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\mathrm{D}}{\beta}\right) = 0,$$

et je pose

$$(5)\qquad \mathrm{P} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{\beta}\frac{1}{\beta}\int_{\beta\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad \mathrm{Q} = \sum_{\beta}\int_{\frac{\beta^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

---

[1] Mémoire couronné par le Grand prix des Sciences mathématiques en 1900.

en convenant de réduire à la moitié les termes qui correspondent aux valeurs de β telles que $\left(\frac{D}{\beta}\right) = 0$.

On aura alors, au lieu de (2),

$$(2^a) \qquad \mathrm{Cl}(D)\log E(D) = S - 2P - 2Q,$$

et je vais prouver que la quantité S s'obtient, avec une grande approximation, sous forme finie, puis je vais déterminer le nombre des termes qu'on doit prendre dans les séries P et Q pour pouvoir obtenir, au moyen de la formule (2^a), le nombre entier $\mathrm{Cl}(D)$. Le nombre desdits termes est relativement assez petit.

En même temps, j'établirai de nouveau la formule (2), puisque le Mémoire qui la donne n'est pas encore imprimé.

I.

Soit $f(z)$ une fonction réelle et positive, décroissante dans l'intervalle $(g \ldots \infty)$; nous considérerons seulement les valeurs de z contenues dans cet intervalle. L'inégalité évidente

$$f(m) > \int_m^{m+1} f(x)\,dx > f(m+1)$$

donne immédiatement

$$\sum_{m=g}^{n+p-1} f(m) > \int_g^{n+p} f(x)\,dx > \sum_{m=g+1}^{n+p} f(m),$$

dont on conclut le théorème de Cauchy que la série $\sum f(m)$ et l'intégrale

$$\int_g^{\infty} f(x)\,dx$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

On a ensuite en cas de convergence les inégalités

$$\sum_{m=n}^{\infty} f(m) > \int_n^{\infty} f(x)\,dx > \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m),$$

dont on déduit

$$(6) \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f(\nu) = \int_n^{\infty} f(x)\,dx - \vartheta f(n) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

et de même

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f(\nu) = \int_n^{\infty} f(x)\,dx + \vartheta' f(n) \qquad (0 < \vartheta' < 1).$$

Nous citerons ces deux équations sous le nom du *lemme de Cauchy*. Je vais en faire usage pour établir un résultat de M. Kinkelin [1] et qui consiste dans la relation

$$(7) \qquad \lim_{\rho=0}\left\{-\frac{1}{\rho} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}\right\} = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

ρ tendant vers zéro par des valeurs positives, bien entendu.

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{(w+x)^{1+\rho}}$$

étant en effet décroissante, le lemme de Cauchy permet de conclure l'égalité

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(w+n)^{\rho}} + \frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\rho}} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

---

(1) *Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlen-Theorie* (*Programm* der Gewerbeschule Basel, 1861-1862).

Il s'ensuit, w étant supposé positif,

$$(\alpha)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}+\frac{(w+n)^{-\rho}-1}{\rho}+\frac{\xi}{(w+n)^{1+\rho}}.$$

En posant, pour un moment,

$$G(\rho)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}+\frac{(w+n)^{-\rho}-1}{\rho},$$

$$F(\rho)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho},$$

l'équation (α) devient

$$(\alpha')\qquad F(\rho)=G(\rho)+\frac{\xi}{(w+n)^{1+\rho}},$$

et je vais en conclure d'abord que la limite de $F(\rho)$ pour ρ infiniment petit est bien déterminée. Soit, en effet, δ une quantité positive aussi petite qu'on le veut, je détermine l'entier n par l'inégalité

$$\frac{1}{w+n}<\frac{1}{2}\delta,$$

et je forme la différence

$$F(\rho)-F(\rho')=[G(\rho)-G(\rho')]+\left[\frac{\xi'}{(w+n)^{1+\rho'}}-\frac{\xi}{(w+n)^{1+\rho}}\right],$$

ξ' étant une quantité positive plus petite que 1 comme ξ. Alors la deuxième parenthèse du second membre sera plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2}\delta$, et l'on peut assigner une limite ρ_0 telle que l'on ait $|G(\rho)-G(\rho')|<\frac{1}{2}\delta$ toutes les fois que les deux quantités positives ρ et ρ' restent inférieures à ρ_0. Cela découle de la continuité de la fonction $G(\rho)$ qui est une transcendante entière. On aura donc

$$|F(\rho)-F(\rho')|<\delta,$$

pourvu que $\rho<\rho_0$ et $\rho'<\rho_0$.

Il s'ensuit que l'expression $\lim_{\rho=0} F(\rho)$ est convergente. Cela étant, l'équation (α') fait voir que la quantité $\mathfrak{F}$ tend vers une limite déterminée $\mathfrak{F}_0$ pour ρ infiniment petit, et puisque

$$G(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n),$$

il s'ensuit

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n) + \frac{\mathfrak{F}_0}{w+n} \qquad (0 \leq \mathfrak{F}_0 \leq 1).$$

En passant à la limite pour n indéfiniment croissant, on trouve

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n) \right\},$$

ou bien

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

ce qui est le théorème de M. Kinkelin.

II.

J'aurai besoin ensuite d'une formule qui se présente tout naturellement dans la théorie de la série malmsténienne

$$(8) \qquad F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x+m)^2+u]^{\frac{1}{2}}},$$

dont l'étude m'a été suggérée par un Mémoire de M. Appell [1] et qui appartient à une classe de transcendantes dont je me suis occupé à

[1] *Voir* une Lettre insérée aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. III.

maintes reprises. J'y suppose u réel et positif, puis $0 < x < 1$, quoique ce ne soit pas nécessaire.

Faisons usage de la formule

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{[(x+m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}} = \int_0^\infty e^{-uz-(x+m)^2 z} z^{\frac{1}{2}s-1} dz$$

qui a lieu pour les valeurs de s à partie réelle positive, que je suppose d'abord supérieure à l'unité comme l'exige la convergence de notre série, et nous aurons

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}s-1} e^{-uz} dz \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z}.$$

Cela étant, la formule connue de la théorie des fonctions elliptiques

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{\omega}(x+m)^2} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(m^2\omega - 2mx)} = \sqrt{\frac{\omega}{i}}\, \vartheta_3(x \mid \omega)$$

donne, en prenant $\omega = \frac{\pi i}{z}$, la représentation

$$(\beta) \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z} = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{\pi i}{z}\right),$$

et notre formule devient

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{\pi i}{z}\right) z^{-\frac{s-1}{2}} e^{-uz} dz$$

ou, en changeant z en $z\pi$,

$$(9) \qquad \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^\infty \vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{i}{z}\right) z^{-\frac{s-1}{2}} e^{-uz\pi} dz.$$

Pour z infiniment petit, la fonction $\vartheta_3\left(x \,\middle|\, \frac{i}{z}\right)$ diffère infiniment peu

de l'unité, et l'existence de l'intégrale exige donc que la partie réelle de s surpasse 1; la formule (β) fait voir, en outre, que l'intégrale existe encore pour $u = 0$, si l'on suppose que l'on ait $0 < x < 1$. Or, en faisant $u = 0$, la série (8) devient

$$F(x, s, 0) = R(x, s) + R(1 - x, s),$$

en dénotant par $R(x, s)$ la série harmonique généralisée

$$(10) \qquad R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s}.$$

Il s'ensuit, si l'on introduit $\frac{1}{z}$ au lieu de z,

$$(9^\circ) \quad \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)[R(x, s) + R(1 - x, s)] = \int_0^\infty \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}} dz,$$

et nous allons transformer le second membre pour qu'il devienne convergent pour toutes les valeurs de s.

Soit, à cet effet, a une quantité positive et décomposons l'intégrale comme il suit :

$$\int_0^a \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}} dz + \int_a^\infty \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}} dz;$$

dans la deuxième intégrale, mettons $\{\vartheta_3(x \mid iz) - 1\} + 1$ au lieu de $\vartheta_3(x \mid iz)$, et décomposons les deux intégrales; puisque la partie réelle de $\frac{s-1}{2}$ est supposée positive, on a

$$\int_a^\infty z^{-\frac{s+1}{2}} dz = \frac{2}{s-1}\, a^{-\frac{s-1}{2}},$$

et il vient

$$(10^*) \quad \left\{ \begin{aligned} &\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)[R(x, s) + R(1 - x, s)] \\ &\quad = \frac{2}{s-1}\, a^{\frac{1-s}{2}} + \int_0^a \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}} dz + \int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x \mid iz) - 1}{z^{\frac{s+1}{2}}} dz. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, je multiplie les deux membres par $\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ et je prends $s = 1 + \rho$; on a d'abord

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}s}}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} a^{\frac{1-s}{2}} = \frac{2}{\rho} + \left[\log\pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + (\rho),$$

(ρ) désignant une quantité infiniment petite avec ρ.

On aura ainsi la formule

$$\begin{aligned}
&\mathrm{R}(x, 1+\rho) + \mathrm{R}(1-x, 1+\rho) - \frac{2}{\rho} \\
&= \left[\log\pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + (\rho) \\
&\quad + \frac{\pi^{\frac{1+\rho}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)} \left[\int_0^\infty \xi_1(x|iz) z^{-\frac{1}{2}\rho-1} dz + \int_a^\infty \frac{\xi_1(x|iz) - 1}{z^{1+\frac{1}{2}\rho}} dz\right],
\end{aligned}$$

et puisque, d'après le théorème de M. Kinkelin,

$$\lim_{\rho=0}\left[\mathrm{R}(x, 1+\rho) - \frac{1}{\rho}\right] = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

nous aurons, en prenant ρ infiniment petit et employant la valeur connue

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \log\pi = \Gamma'(1) - \log 4\pi :$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = [\Gamma'(1) - \log 4\pi] - \log a \\
&\qquad - \int_0^\infty \xi_3(x|iz)\frac{dz}{z} - \int_a^\infty \frac{\xi_3(x|iz) - 1}{z} dz,
\end{aligned}\right.$$

formule qui est d'importance capitale pour notre objet et que nous

avons établie dans une Note publiée au *Bulletin de la Société royale des Sciences de Prague*, année 1897 [1].

III.

Dans la formule qui vient d'être obtenue, je remplace, dans la première intégrale qui se présente au second membre, la quantité $\vartheta_3(x|iz)$ par sa valeur

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{z}(x+m)^2},$$

et puis j'y change z en $\frac{1}{z}$; en dénotant ensuite par C la constante d'Euler

$$C = -\Gamma'(1) = 0,577215\ldots,$$

et posant, pour abréger,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x),$$

notre formule devient

$$(11^*)\quad \left\{\begin{aligned} &-C - \log 4\pi + \log a - \psi(x) - \psi(1-x) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z\pi}\frac{dz}{\sqrt{z}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nx\pi\int_{a}^{\infty} e^{-n^2 z\pi}\frac{dz}{z}. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, je me rappelle la formule suivante, conséquence immédiate de la formule classique de Dirichlet,

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\psi\left(\frac{h}{D}\right) = -\sqrt{D}\,Cl(D)\log E(D).$$

Soit maintenant D un discriminant fondamental positif et prenons,

---

[1] *Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes.*

dans la formule (11'), $x = \frac{h}{D}$, et, après avoir multiplié par le signe de Legendre $\left(\frac{D}{h}\right)$, ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$.

A cause des relations

$$\left(\frac{D}{D-h}\right) = \left(\frac{D}{h}\right), \qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right) = 0,$$

on trouve, en faisant usage de la formule (12), l'équation

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{h=0}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{h}{D}\right)^2 \frac{2\pi}{D} z}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$
$$+ 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi z}\frac{dz}{z},$$

où nous avons fait usage de la formule connue

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2nh\pi}{D} = \left(\frac{D}{n}\right)\sqrt{D},$$

qui subsiste pour les discriminants fondamentaux positifs.

La double sommation qui se présente au second membre s'effectue en posant $h + mD = n$ et en observant que

$$\left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{D}{n}\right);$$

il vient ainsi

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z\pi}{D}}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$
$$+ 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi z}\frac{dz}{z}.$$

Les termes de la première série sont égaux deux à deux, puis les

substitutions $z = \frac{D^2 x^2}{n^2 \pi}$, $z = \frac{x}{n^2 \pi}$ donnent

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z \pi}{D^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2D}{n\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{D}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} e^{-n^2 z \pi} \frac{dz}{z} = \int_{n^2 a \pi}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x};$$

posant donc, pour plus de symétrie, $a = \frac{1}{Du}$, nous aurons

$$Cl(D) \log E(D) = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2 \pi}{Du}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

u désignant une quantité positive arbitraire. C'est la formule (2) annoncée au commencement.

IV.

Revenons sur la formule (11') en cherchant ce qu'elle devient pour x infiniment petit. On a d'abord

$$\psi(x) = \psi(1 + x) - \frac{1}{x},$$

d'où il suit que, pour x infiniment petit, le premier membre de (11') devient

$$(\gamma) \qquad C - \log 4\pi + \log a + \frac{1}{x}.$$

Quant au second, tous ses termes restent finis pour $x = 0$ à l'exception du terme $m = 0$ de la première somme; celui-ci est

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-x^2 z \pi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2 \pi}{a}}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} - \int_0^{\frac{x^2 \pi}{a}} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right]$$

ou bien

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{a}} + (x),$$

(x) désignant un infiniment petit. On aura ainsi, en supprimant de part et d'autre le terme $\frac{1}{x}$ et passant à la limite,

$$\begin{aligned} C - \log 4\pi + \log a = &- \frac{2}{\sqrt{a}} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-m^2 z\pi}\frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{\infty} e^{-n^2 z\pi}\frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Posons $a = \frac{1}{c}$ et transformons, comme plus haut, les intégrales; nous aurons la relation

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{c\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{c}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \\ &\quad = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{c} - \frac{1}{2}\log c, \end{aligned} \right.$$

qui nous servira à évaluer les sommes

$$(14)\qquad S_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad S_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{D}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Il résulte, en effet, de la formule (13), en y faisant $c = \frac{u}{D}$, l'équation

$$\begin{aligned} S_1 = &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx \\ &= \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\frac{u}{D}} - \log\sqrt{\frac{u}{D}} - \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2 D\pi}{u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

puis, en y prenant $v = \mathrm{D}u$,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\mathrm{D}u} - \log\sqrt{\mathrm{D}u} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_{m\sqrt{\mathrm{D}u\pi}}^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Cela fait, observons que les équations qu'on trouve en intégrant par parties,

$$\int_a^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} = \frac{e^{-a}}{a} - \int_a^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1}{2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} \frac{dx}{x^2},$$

donnent les inégalités suivantes :

$$(15) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2 \mathrm{D}\pi}{u}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} < \frac{u}{\mathrm{D}\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{m^2 \mathrm{D}\pi}{u}}}{m^2}, \\ \displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m\sqrt{\mathrm{D}u\pi}}^{\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{\mathrm{D}u\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m^2 \mathrm{D}u\pi}}{m}. \end{cases}$$

En choisissant u de telle sorte que $\mathrm{D}u$ en même temps que $\frac{\mathrm{D}}{u}$ soient assez grands (par exemple $u = 1$), les deuxièmes membres des inégalités (15) seront insignifiants, et les quantités (14) seront données avec une grande approximation par les formules

$$(14^a) \qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\dfrac{u}{\mathrm{D}}} + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{D}}{u}}, \\ S_2 = \dfrac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\mathrm{D}u} - \log\sqrt{\mathrm{D}u}. \end{cases}$$

La somme S définie par la formule (3) qui est

$$(16) \qquad S = S_1\sqrt{\mathrm{D}} + S_2$$

a donc pour valeur approchée l'expression

$$(16') \quad \begin{cases} S = \frac{1}{2}\sqrt{D}\,(\log D + C - \log 4\pi + 2\sqrt{u} - \log u) \\ \qquad - \frac{1}{2}(\log D - C + \log 4\pi + \log u - 2\sqrt{u}). \end{cases}$$

La partie dépendante du paramètre arbitraire u, à savoir

$$(1 + \sqrt{D})(\sqrt{u} - \log\sqrt{u}),$$

devient minimale pour $u = 1$ et nous ferons toujours cette hypothèse. On aura ainsi la formule approchée, relative à l'hypothèse de $u = 1$,

$$(17) \qquad S = \frac{1}{2}\sqrt{D}(\log D + 0.046181) - \frac{1}{2}\log D + 0.023090,$$

et l'on pourra, dans la pratique, remplacer le second membre par la quantité

$$\frac{1}{2}\sqrt{D}\log D - \frac{1}{2}\log D,$$

dès que le discriminant D dépasse une certaine limite, en supposant, bien entendu, que la quantité $\log E(D)$ soit elle-même aussi considérable.

V.

Nous allons maintenant établir une limite supérieure de l'erreur qui s'introduit dans les calculs en bornant les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_{\frac{\pi}{D}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

à un nombre fini de termes, que je désigne respectivement par r, r'. Les erreurs en question seront en tout cas inférieures à des quantités

respectives

$$a_r = \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\nu\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2} dx, \qquad b_{r'} = \sum_{\nu=r'+1}^{\infty} \int_{\frac{\nu^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Les fonctions

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad \text{et} \qquad f(z) = \int_{\alpha^2 z^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

étant décroissantes, l'application du lemme de Cauchy

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f(\nu) = \int_m^{\infty} f(z)\, dz - \mathfrak{z} f(m) \qquad (0 < \mathfrak{z} < 1)$$

donne immédiatement

$$a_r = \int_r^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2} dx - \frac{\mathfrak{z}}{r} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$b_{r'} = \int_{r'}^{\infty} dz \int_{\alpha^2 z^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \mathfrak{z}' \int_{\alpha^2 r'^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sqrt{\frac{u\pi}{D}}, \qquad \alpha' = \sqrt{\frac{\pi}{Du}},$$

puis

$$0 < \mathfrak{z} < 1, \qquad 0 < \mathfrak{z}' < 1.$$

Or, l'intégrale double

$$J = \int_r^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

correspond aux conditions $r < z < \frac{x}{\alpha}$ et pourra s'écrire

$$(18) \quad J = \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_r^{\frac{x}{\alpha}} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2} dx [\log x - \log(\alpha r)]\, dx.$$

ou, en faisant $\alpha r = v$,

$$(18^1)\qquad \mathrm{J}(v) = \int_0^v e^{-v} \log v\, dv - \log v \int_0^v e^{-v}\, dv;$$

au moyen de cette écriture la valeur de a_r s'exprime comme suit :

$$(18^2)\qquad a_r = \mathrm{J}(\alpha r) - \frac{\xi}{r} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-v}\, dv.$$

Pour transformer b_r, observons que l'intégrale double

$$\mathrm{J} = \int_r^{\infty} dz \int_{\alpha(z-r)}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

correspond aux conditions $r < z < \frac{\sqrt{x}}{\alpha}$ et pourra donc être mise sous la forme

$$\mathrm{J} = \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \int_r^{\frac{\sqrt{x}}{\alpha}} dz = \int_{\alpha r}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\alpha} - r\right) e^{-x} \frac{dx}{x},$$

ou bien

$$\mathrm{J} = \frac{2}{\alpha} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-v}\, dv - r \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Posant donc pour abréger

$$(19)\qquad \mathrm{K}(v) = 2 \int_0^v e^{-v}\, dv - v \int_0^v e^{-v} \frac{dv}{v},$$

on aura comme valeur de la quantité b_r

$$(19^1)\qquad b_r = \frac{\mathrm{K}(\alpha r)}{\alpha} - \frac{\xi}{r} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Cela étant, posons $u = \xi^2$, pour que les quantités

$$\alpha = \frac{\xi}{\xi}\sqrt{\mathrm{D}}, \qquad \alpha = \frac{1}{\xi}\sqrt{\mathrm{D}}$$

s'expriment linéairement, et prenons ξ pour variable indépendante. En faisant usage des relations faciles à vérifier

$$\frac{dJ}{dv} = -\frac{1}{v}\int_v^\infty e^{-x^2}dx, \qquad \frac{dK}{dv} = -\int_{v^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

on trouve aisément pour la quantité suivante, partie principale de $2\sqrt{\frac{D}{\pi}}a_r + b_r$,

$$\Phi = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}J(\alpha r) + \frac{K(\alpha' r')}{\alpha'},$$

l'expression de sa dérivée relative à ξ :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{2}{\alpha}\int_{\alpha r}^\infty e^{-x^2}dx + \frac{2}{\alpha'\xi}\int_{\alpha' r'}^\infty e^{-x^2}dx.$$

Cette quantité s'annule en prenant $r = r'$, $\xi = 1$ et l'on voit que l'erreur devient à peu près minimale, si l'on prend le nombre de termes égal dans les deux séries, et en supposant $u = 1$. Nous poserons donc d'une manière définitive

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}}, \qquad v = \alpha r,$$

de sorte que nos quantités deviennent

$$a_r = J(v) - \frac{2}{r}\int_v^\infty e^{-x^2}dx, \qquad b_r = \frac{K(v)}{\alpha} - 2r\int_{v^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x};$$

nous aurons besoin de la quantité suivante

$$c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}a_r + b_r = \frac{2a_r}{\alpha} + b_r \tag{20}$$

qui définit la limite supérieure de l'erreur dont il s'agit, à savoir

$$c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\int_{\nu\alpha}^\infty e^{-x^2}dx + \sum_{\nu=r+1}^{\infty}\int_{\nu^2\alpha^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

On aura d'abord, au moyen de l'équation (2), la formule

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) \\ &\quad = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\left[\frac{2}{\alpha m}\int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x}\,dx + \int_{\alpha m^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}\right] + \Theta e_r \\ &\qquad\qquad (-1 < \Theta < 1), \end{aligned}\right.$$

et l'expression suivante de e_r

$$(20^1)\qquad e_r = \frac{2\mathrm{J}(v) + \mathrm{K}(v)}{\alpha} - \frac{2\xi}{v}\int_{v}^{\infty} e^{-x}\,dx - \xi'\int_{v}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

nous servira à déterminer le nombre r.

Posons, pour abréger,

$$2\mathrm{J}(v) + \mathrm{K}(v) = \mathrm{A}(v),$$

de sorte que la fonction A sera définie par l'expression

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}(v) &= 2\int_{v}^{\infty} e^{-x}\log x\,dx \\ &\quad + (2 - 2\log v)\int_{v}^{\infty} e^{-x}\,dx - v\int_{v}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right.$$

et, en posant encore

$$(23)\qquad \Omega(v) = \frac{2}{v}\int_{v}^{\infty} e^{-x}\,dx + \int_{v}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

la formule (20^1) donne comme conséquence

$$(20^2)\qquad e_r = \frac{\mathrm{A}(v)}{\alpha} - \xi\,\Omega(v) \qquad (0 < \xi < 1).$$

Cela étant, l'entier $\mathrm{Cl}(\mathrm{D})$ ayant une parité connue, il suffira de choisir r par la condition

$$e_r < \log \mathrm{E}(\mathrm{D}),$$

qui sera remplie à plus forte raison, d'après (20^2), si l'on fait

$$(23) \qquad A(\varrho) \leq \alpha \log E(D) \qquad (\varrho = \alpha r).$$

Pour déterminer r, il suffira de dresser une Table de valeurs de la fonction $A(\varrho)$ qui se calcule aisément au moyen de la série

$$(24) \quad \begin{cases} A(\varrho) = (2 - C - \log 4)\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \qquad + (2\varrho - \sqrt{\pi})\log\varrho + C\varrho + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(4\nu+1)\varrho^{2\nu+1}}{\nu!\,\nu(2\nu+1)^2}, \end{cases}$$

ou bien

$$A(\varrho) = 0,0323 + (2\varrho - 1,7724)\log\varrho + 0,5772\varrho$$
$$- \frac{5}{9}\varrho^3 + \frac{9}{10}\varrho^5 - \frac{13}{882}\varrho^7 + \ldots.$$

On a, par exemple,

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = 0,7896, \qquad A\left(\frac{1}{3}\right) = 1,4091, \qquad A\left(\frac{1}{4}\right) = 1,9319,$$
$$A\left(\frac{1}{5}\right) = 2,3519, \qquad A\left(\frac{1}{6}\right) = 2,7044, \qquad A\left(\frac{1}{7}\right) = 3,0060,$$
$$A\left(\frac{1}{8}\right) = 3,2690.$$

Bien que le nombre r des termes, que la formule (21) contient, ne soit pas exagéré, il sera néanmoins beaucoup plus commode de séparer les termes qui correspondent à des valeurs $m = \beta$, où l'on a

$$(25^0) \qquad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{D}{\beta}\right) = 0 \qquad (\beta = \beta_0),$$

et de prendre

$$(25) \qquad P_r = \sum_{\beta \leq r} \frac{2}{\alpha\beta}\int_{\alpha\beta}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad Q_r = \sum_{\beta \leq r} \int_{\alpha^2\beta^2}^{x} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

en convenant de réduire à la moitié tout terme $\beta = \beta_0$ correspondant à une valeur telle que $\left(\frac{D}{\beta_0}\right) = 0$. Le deuxième membre de la formule (21) devient alors

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\frac{2}{\alpha m}\int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x^2}dx + \int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}\right) = 2(P_r - Q_r) + \Theta c_r,$$

et la somme qui figure au début ayant pour valeur l'expression $S - c_r$, nous aurons

$$(26) \qquad Cl(D)\log E(D) = S - 2(P_r - Q_r) - (1 - \Theta)c_r,$$

avec la valeur suivante de S :

$$(26^a) \quad S = \frac{1}{2}\sqrt{D}(\log D + 0,0\,46181) - \frac{1}{2}\log D + 0,0\,23090,$$

qui a été donnée dans (17).

Puisque la quantité $1 - \Theta$ se trouve entre 0 et 2, la formule (26) peut s'exprimer par l'inégalité qui résulte, en outre, de la condition $c_r < \log E(D)$,

$$(26^b) \qquad \frac{S - 2(P_r - Q_r)}{\log E(D)} - 2 < Cl(D) < \frac{S - 2(P_r - Q_r)}{\log E(D)},$$

et cette dernière inégalité définit l'entier $Cl(D)$ sans ambiguïté, si l'on en connaît d'avance la parité. Aussi les cas ne sont pas rares où l'inégalité seule

$$Cl(D)\log E(D) < S$$

suffit pour déterminer le nombre des classes.

Notons encore une fois que nous avons posé $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}}$, $\alpha r = v$, et que le nombre r se détermine au moyen de la condition (23).

L'indétermination de la formule (26) devient plus restreinte, si l'on y remplace c_r par sa valeur calculée au moyen de la formule (20^2).

Toutes les difficultés du problème reviennent donc à la determi-

nation de la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 1,$$

dont la théorie ne paraît pas être encore assez avancée.

Pour montrer l'utilité pratique de ce qui précède, je vais déterminer le nombre des classes du discriminant premier $D = 9817$; les discriminants de la forme $8k + 5$ seuls peuvent avoir T et U impairs; pour les autres, on a $T = 2x$, $U = 2y$ et $x^2 - Dy^2 = 1$. J'emprunte à une citation de M. Konen le fait découvert par M. A. Martin, que l'entier x contient 97 chiffres; la quantité $\log E(D)$ étant à peu près

$$\log T = \log 2x,$$

on aura environ

$$\log E(D) = 222,$$

et puisque, dans notre cas, $\alpha = 0,01788$, la condition concernant le nombre des termes devient

$$A(c) \geqq \alpha \log E(D) = 1,$$

la valeur $A\left(\frac{1}{8}\right) = 3,269$ permet de conclure qu'il suffira de prendre $\alpha r \geqq \frac{1}{8}$, d'où $r = 7$.

L'équation $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$ n'admettant que des solutions $\beta = 5$ et $\beta = 7$, dans l'intervalle de $\beta = 1$ à $\beta = r = 7$, les sommes P_r et Q_r contiennent deux termes chacune, lesquels se calculent d'ailleurs facilement.

Mais on trouve $S = 450,5$, d'où

$$Cl(D) < \frac{450}{222},$$

et, par conséquent,

$$Cl(D) = 1 \qquad (D = 9817),$$

le nombre des classes d'un discriminant premier devant être impair.

VI.

Si le discriminant D admet comme facteur le nombre 2 ou 3, les valeurs β_0 sont très nombreuses et le calcul pourrait devenir pénible. C'est pourquoi j'aurais recommandé de modifier la formule en chassant tout d'abord les valeurs de m qui contiennent l'un ou l'autre de ces facteurs.

Soit donc $D = 4m$ un discriminant pair; la somme qui figure au second membre de (21) ne contient effectivement que des termes de rang impair et l'on pourra l'écrire

$$S = 2(P'_r + Q'_r) + (\Theta - 1)\sigma'_r,$$

où P'_r et Q'_r sont les sommes P_r et Q_r bornées aux termes provenant des valeurs impaires de β, puis

$$S = \sum_{\mu} \left(\frac{2}{\pi\mu} \int_{2\nu}^{\infty} e^{-x} dx + \int_{2\nu}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right) \qquad (\mu = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Cela étant, posons

$$S' = \sum_{\nu=1}^{r} \left(\frac{2}{\pi\mu} \int_{(\nu-1)\pi}^{\infty} e^{-x} dx + \int_{(\nu-1)\pi}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right),$$

nous aurons évidemment

$$S = S' + S''.$$

S désignant la série étudiée plus haut. Pour obtenir la quantité S'', observons que l'on a

$$S'' = \frac{1}{2}\sqrt{D}\, S_1 + S_2,$$

où

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^{r} \frac{1}{\nu} \int_{(\nu-1)\pi}^{\infty} e^{-x} dx, \qquad S_2 = \sum_{\nu=1}^{r} \int_{(\nu-1)\pi}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

ces deux dernières quantités s'obtiennent avec une grande approxi-

mation au moyen des formules (14) et (14^a), dans lesquelles il faut prendre $u = 4$ et $u = \frac{1}{4}$; il vient ainsi, en employant l'écriture $D = 4m$,

$$S''_1 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\log m \qquad S''_2 = \frac{C - \log 4\pi}{2} + \sqrt{m} - \frac{1}{2}\log m;$$

on a ainsi, en écrivant, pour un moment, $\frac{C - \log 4\pi}{2} = A$,

$$S'' = \frac{1}{2}\sqrt{m}\log m + \sqrt{m}(A + 1) - \frac{1}{2}\log m + A + 1,$$

et puisque, d'après (16*), pour $D = 4m$, $u = 1$:

$$S = \sqrt{m}(\log m + 2A + 2 + \log 4) - \frac{1}{2}\log m + A + 1 - \log 2,$$

il vient, en retranchant,

$$(27) \qquad S' = \frac{1}{2}\sqrt{m}(\log m + C - \log\pi + 2 + 2\log 2) - \log 2$$

ou bien

$$(27') \qquad S' = \frac{1}{2}\sqrt{m}(\log m + 2,818770) - 0,693147;$$

le nombre des classes sera alors déterminé par les inégalités

$$(28) \quad \frac{S' - 2P'_r - 2Q'_r}{\log E(D)} > Cl(D) > \frac{S' - 2P'_r - 2Q'_r}{\log E(D)} - 2 \qquad (D = 4m).$$

Soit, par exemple, $D = 4m = 4 \times 859 = 3436$, on a

$$\frac{1}{2}T = 7024 \times 10^{18},$$

d'où

$$\log E(D) = 53,28,$$

puis

$$\alpha = 0,0308,$$

et enfin

$$\alpha \log E(D) = 1,64;$$

observant que $A\left(\frac{1}{3}\right) = 1,409$, on peut prendre

$$\alpha r = \frac{1}{3},$$

d'où

$$r = 11,$$

et il n'y aura qu'une solution de l'équation $\left(\frac{D}{z}\right) = -1$, à savoir $z = 7$.

On trouve

$$\log m + 2,82 = 9,57, \qquad \sqrt{m} = 29,30,$$

d'où

$$S' < 150, \qquad Cl(D) < \frac{150}{55,48},$$

donc

$$Cl(D) = 2,$$

le nombre des classes devant ici être pair.

Le lecteur voit comment se modifie la formule générale en cas de $D = 3m$ ou $D = 12m$.

La méthode exposée ici en partant de la formule (2) est applicable aussi aux autres développements que nous avons établis dans le Mémoire couronné, soit pour les discriminants positifs, soit négatifs. Je reviendrai, dans une prochaine occasion, sur les séries semi-convergentes qui se présentent dans ce dernier cas, pour faire voir que les méthodes analytiques présentent un réel avantage sur le procédé élémentaire de la détermination des formes réduites.

Recherches sur les équations aux dérivées partielles;

PAR M. J. LE ROUX.

CHAPITRE I.

LES FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

1. *Utilité de la considération des fonctions d'une infinité de variables.* — Les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles dépendent, en général, d'une infinité dénombrable de constantes arbitraires; ce sont, par exemple, les valeurs de certaines dérivées, ou de certaines fonctions des dérivées, en un point déterminé. Sans doute, dans l'étude des conditions de détermination et de convergence, il est d'usage de grouper les constantes de manière à constituer des ensembles finis de fonctions et de constantes arbitraires. Il ne faut pas se dissimuler cependant que le groupement des constantes sous forme de fonctions initiales est purement artificiel dans la plupart des cas. Cette méthode a l'avantage d'éviter la considération directe des ensembles infinis; elle donne une image simple du degré d'indétermination et se prête avec facilité à la définition des conditions de convergence. Mais quand on cherche à constituer, dans l'ensemble des intégrales, des groupes naturels, il est indispensable de considérer la totalité des paramètres introduits, sans se préoccuper de les rapporter à telle ou telle fonction initiale.

On est amené ainsi à considérer les fonctions d'une infinité de variables indépendantes. Les fonctions qui s'introduisent dans la théorie

des équations aux dérivées partielles appartiennent d'ailleurs à un type simple, jouissant de propriétés remarquables, que nous allons d'abord définir.

2. *Éléments variables dont dépendent les intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles.* — Soit S un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles définissant m fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$p_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On sait qu'en adjoignant aux équations du système S celles que l'on obtient en les différentiant indéfiniment on peut calculer quelques-unes des fonctions z et certaines dérivées p en fonction des autres quantités z et p qui restent arbitraires. Les premières sont les dérivées principales de MM. Méray et Riquier, les secondes les dérivées paramétriques. Ou bien encore, sous une forme plus symétrique, on peut, comme le propose M. Tresse, exprimer les z et leurs dérivées en fonction de certains paramètres et des variables indépendantes, de la manière que nous allons indiquer : les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_m$ seront exprimées à l'aide des x et de ε_0 paramètres : $u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,\varepsilon_0}$, appelés *paramètres d'ordre zéro*; les dérivées du premier ordre s'exprimeront à l'aide des x, des paramètres d'ordre zéro et de ε_1 nouveaux paramètres appelés *paramètres du premier ordre*, etc.

En général, les dérivées d'un ordre donné ν seront des fonctions des x et des paramètres d'ordre égal ou inférieur à ν.

Nous appellerons *paramètres fondamentaux* les paramètres u ainsi introduits, et nous les rangerons en série linéaire, par ordre croissant, les paramètres d'un même ordre étant placés suivant une loi quelconque. Nous affecterons chacun d'un seul indice égal à son rang : $u_1, u_2, u_3, \ldots$

Les paramètres u sont des fonctions des x, des z et de leurs dérivées, telles que les paramètres d'un ordre déterminé ν ne contiennent pas les dérivées d'ordre supérieur à ν, mais dépendent nécessairement de quelques-unes des dérivées d'ordre ν. Elles sont d'ailleurs suscep-

tibles d'une infinité d'expressions, équivalentes entre elles en vertu des équations du système S.

5. *Propriétés fondamentales des solutions.* — Si nous donnons aux variables x, u, des valeurs initiales x_i^0, u_i^0, les dérivées $p_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ prendront des valeurs $p^0_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ et l'on aura, pour représenter les fonctions inconnues, les séries de Taylor

$$(1)\qquad z_i = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} p^0_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \frac{(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\,\frac{(x_2-x_2^0)^{\alpha_2}}{\alpha_2!}\cdots\frac{(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n!}.$$

Ces séries jouissent des propriétés suivantes, fondamentales pour la suite :

I. *Les différents termes sont des fonctions analytiques de tous leurs éléments x, x^0, u^0; les termes d'ordre ν ne dépendent pas des paramètres d'ordre supérieur à ν.*

Chaque terme est donc une fonction d'un nombre fini d'éléments variables x, x^0, u^0, mais ce nombre croît en général indéfiniment avec le rang du terme considéré.

II. *Dans le domaine des quantités complexes on peut assigner pour chacun de ces éléments variables une aire simple de variation*

$$\Delta x_1,\quad \Delta x_2,\quad \ldots,\quad \Delta x_i^0,\quad \ldots,\quad \Delta u_i^0,\quad \ldots,$$

telle que pour tous les systèmes de valeurs de ces variables qui sont intérieures aux aires correspondantes, les séries considérées soient uniformément convergentes.

Cette propriété est une conséquence immédiate de la démonstration qu'on donne habituellement de l'existence des intégrales par la méthode des fonctions majorantes, pourvu que l'on prenne comme paramètres fondamentaux les dérivées paramétriques de MM. Méray et Riquier. Dans le cas général, nous supposerons les paramètres choisis de telle façon que la propriété subsiste. Nous appellerons domaine Δ celui qui est constitué par l'ensemble des valeurs des éléments variables intérieures aux aires considérées.

Il importe de remarquer que le domaine A n'est pas le domaine d'existence des fonctions z_i mais un domaine *restreint* où ces fonctions existent certainement et où l'on peut les soumettre à des opérations déterminées.

III. *Étant donné un nombre positif* ε, *on peut déterminer un nombre* μ *tel qu'en négligeant dans les séries* (1) *les termes qui contiennent les paramètres d'indice supérieur à* μ *le module du reste négligé soit inférieur à* ε, *pour toutes les valeurs des variables intérieures au domaine* A.

Cette propriété est une conséquence de la précédente, puisque le rang des termes qui contiennent les paramètres d'indice supérieur à μ croît indéfiniment avec le nombre μ.

IV. *Les séries* (1) *représentent des fonctions analytiques de chacune des variables* x, x^0, n^0, *et même de tout ensemble contenant un nombre* fini *de ces variables.*

4. *Domaine* restreint *dans un champ d'une infinité de variables.* — Nous allons maintenant entreprendre directement l'étude des fonctions d'une infinité de variables qui présentent en tout ou en partie les caractères que nous venons de définir.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ des variables formant un ensemble infini dénombrable. Il faut d'abord définir pour cet ensemble un domaine *restreint* de variation. S'il s'agit de quantités réelles nous ferons correspondre à chaque variable x_n un intervalle (a_n, b_n), $(a_n < b_n)$; l'ensemble des inégalités

$$a_n < x_n < b_n$$

définira le domaine. S'il s'agit de quantités complexes on représentera chaque variable x_n par un point d'un plan et on lui fera correspondre dans son plan une aire simple A_n dans laquelle le point considéré devra rester enfermé. Nous supposerons dans tous les cas, pour le domaine *restreint*, que les limites relatives à chaque variable x_n (soient les nombres a_n, b_n; soit le contour de l'aire A_n) sont indépendantes des valeurs attribuées aux autres variables dans leurs limites respectives.

Ici se présente une considération qui n'a pas d'analogie dans la théorie des fonctions d'un nombre limité de variables; lorsque n croît indéfiniment, il peut exister une infinité de différences $b_n - a_n$ inférieures à tout nombre positif ε sans être rigoureusement nulles. Un fait analogue est également possible pour les variables complexes. Si cette circonstance se présente, nous dirons que le domaine est *évanouissant*.

En général, les résultats qui vont suivre sont applicables aussi bien aux domaines *évanouissants* qu'aux domaines *non évanouissants*. Cependant, certains énoncés, certains procédés de raisonnement demanderaient quelquefois une légère modification. C'est pourquoi nous supposerons en général le domaine *non évanouissant*. On peut toujours évidemment, par un changement de variables, rendre le domaine considéré non évanouissant.

Nous appelons A le domaine défini par les limites considérées et nous regardons tout ensemble de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ comme les coordonnées d'un point x.

Le point x appartient au domaine A si toutes ses coordonnées sont enfermées dans les limites correspondantes.

5. *Fonctions d'une infinité de variables. Fonctions convergentes.* — Une fonction $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ est définie dans le domaine A si à tout point x du domaine correspond une valeur bien déterminée pour la fonction.

La définition de la continuité, dans un domaine non évanouissant, est la même que pour les fonctions d'un nombre limité de variables.

La fonction $f(x)$ est continue dans le domaine non évanouissant A si, étant donné un nombre positif arbitraire ε, on peut trouver un nombre η tel que les inégalités

$$|h_n| < \eta$$

entraînent la suivante :

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

[On a posé $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n, \ldots) = f(x+h)$].

Ces définitions sont indépendantes de la manière dont on établira

la correspondance entre la valeur de $f(x)$ et le système de valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$.

Il y a lieu maintenant d'introduire une notion nouvelle, celle de *fonction convergente*.

Soit x^0, $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$ un point déterminé du domaine A; $x^0 + h$, $(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots)$ un autre point arbitraire du domaine. Désignons par

$$f_m(x^0 + h, x^0) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \ldots)$$

la fonction qu'on obtient en négligeant dans $f(x^0 + h)$ les accroissements $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots$ de toutes les variables dont l'indice est supérieur à m. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est *convergente*, si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre m', tel que l'inégalité

$$m > m' \tag{2}$$

entraîne pour conséquence

$$|f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x^0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Lorsqu'on regarde le point x^0 comme fixe et les h comme des quantités variables, la limite trouvée m' dépendra en général des h. Nous dirons que la fonction est *uniformément convergente* si l'on peut choisir m' de telle façon que l'inégalité (2) entraîne l'inégalité (3), quels que soient les h, sous la seule condition que le point $x^0 + h$ soit intérieur à A.

Si la limite m' peut être prise indépendante des h, on peut aussi la prendre indépendante des x^0. La démonstration est immédiate, en remarquant que l'on a identiquement

$$\left\{\begin{aligned} & f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + h_{m+1}, \ldots) \\ & - f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + k_{m+1}, \ldots, x_{m+p}^0 + k_{m+p}, \ldots) \\ & = [f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + h_{m+1}, \ldots) \\ & \qquad\qquad - f_m(x^0 + h, x^0)] \\ & - [f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m+1}^0 + k_{m+1}, \ldots, x_{m+p}^0 + k_{m+p}, \ldots) \\ & \qquad\qquad - f_m(x^0 + h, x^0)]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Il est visible que la définition que nous donnons des fonctions convergentes ou uniformément convergentes comprend celle des séries, des produits infinis, etc. Dans une série $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$, la somme S est la limite de la somme S_n obtenue en attribuant la valeur zéro à tous les termes dont l'indice surpasse n; dans un produit infini, c'est par l'unité qu'on remplace les facteurs dont le rang surpasse une certaine limite. Le choix de la valeur de comparaison x^0 est suggéré par la nature de la question dans ces exemples simples; cependant, on pourrait aussi dans une certaine mesure la regarder comme arbitraire.

Une fonction peut évidemment être convergente et même uniformément convergente sans être continue. De même elle peut exister et même être continue sans être convergente. L'exemple le plus simple nous en est fourni par le prolongement d'une série de Taylor en dehors de son cercle de convergence.

Soit $f(z)$ une fonction analytique de z dans une aire simple C contenant l'origine; en désignant par $x_0, x_1, \ldots,$ les valeurs des dérivées pour $z = 0$, on a donc à l'intérieur du cercle de convergence

$$(5) \qquad f(z) = x_0 + \frac{x_1}{1} z + \frac{x_2}{1.2} z^2 + \ldots.$$

Regardons cette valeur comme une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, z$, et désignons-la par $\varphi(x, z)$. Les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ pourront parcourir le champ entier des valeurs des x pour lesquels la fonction $f(z)$ reste analytique dans l'aire C.

Soit α un point de l'aire C extérieur au cercle de convergence de la série (5). La fonction $\varphi(x, \alpha)$, dans laquelle on regarde α comme une constante numérique, est bien déterminée et même continue, mais elle n'est pas convergente. On a en effet

$$\varphi_m(x, 0, \alpha) = x_0 + \frac{x_1 \alpha}{1} + \frac{x_2}{1.2} \alpha^2 + \ldots + \frac{x_m}{m!} \alpha^m,$$

et cette expression ne tend pas vers $\varphi(x, \alpha)$ quand m croît indéfiniment.

Il y a donc lieu d'établir une distinction entre le domaine d'existence et le domaine de convergence d'une fonction d'une infinité de variables. On peut rapprocher ces réflexions des considérations de M. Borel sur les séries divergentes.

6. *Séries normales.* — Une fonction convergente peut être représentée par une série convergente dont chaque terme de rang fini ne contient qu'un nombre limité de variables.

En effet, la série

$$(6)\qquad \begin{cases} f_0(x^0) + [f_1(x^0+h, x^0) - f(x^0)] \\ \qquad\qquad + [f_2(x^0+h, x^0) - f_1(x^0+h, x^0)] + \ldots \end{cases}$$

satisfait aux conditions énoncées et a pour limite $f(x^0+h)$.

De plus, si cette fonction est *uniformément convergente*, la série l'est également.

La série (6) n'est qu'un cas particulier des séries que nous appelons *normales* et qui sont caractérisées par les propriétés suivantes :

1° Elles sont uniformément convergentes dans le domaine considéré;

2° Chaque terme de rang fini ne contient qu'un nombre fini de variables.

Toute série normale représente une fonction uniformément convergente.

Les séries qui représentent les intégrales analytiques des équations aux dérivées partielles sont des séries normales.

7. *Calculs sur les fonctions uniformément convergentes. Séries dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes.* — On peut effectuer, sur les fonctions uniformément convergentes, les opérations ordinaires de l'Algèbre : les résultats sont encore des fonctions uniformément convergentes.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions uniformément convergentes est une fonction uniformément convergente.

Le quotient de deux fonctions uniformément convergentes est une fonction uniformément convergente, pourvu que le dénominateur soit différent de zéro dans le domaine considéré. Considérons maintenant une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_i + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes dans le

domaine A. Supposons, d'autre part, que cette série soit uniformément convergente dans A. Je dis qu'elle y représente une fonction uniformément convergente.

Désignons par $S^{(i)}(x)$ la somme des i premiers termes et par $S_m^{(i)}(x^0+h, x^0)$, ce que devient $S^{(i)}(x^0+h)$ quand on y néglige les accroissements des variables dont l'indice est supérieur à m. Soit de même $S(x)$ la somme de la série considérée, $S_m(x^0+h, x^0)$ ayant la signification ordinaire.

Il s'agit de démontrer que

$$S(x^0+h, x^0) - S_m(x^0+h, x^0)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

C'est là une conséquence immédiate de l'identité

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &S(x^0+h) - S_m(x^0+h, x^0) \\ &\quad = [S(x^0+h) - S^{(i)}(x^0+h)] + [S^{(i)}(x^0+h) - S_m^{(i)}(x^0+h, x^0)] \\ &\qquad - [S_m(x^0+h, x^0) - S_m^{(i)}(x^0+h, x^0)]. \end{aligned}\right.$$

Ayant choisi un nombre positif ε, on peut, en vertu de la convergence uniforme, trouver un nombre i' tel que l'inégalité

$$i > i'$$

entraîne

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &|S(x^0+h) - S^{(i)}(x^0+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &|S_m(x^0+h, x^0) - S_m^{(i)}(x^0+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}\right.$$

quel que soit l'indice m. Le nombre i étant fixé et choisi de manière à satisfaire à cette condition, la fonction $S^{(i)}(x)$ est uniformément convergente; on peut donc trouver un nombre m' tel que l'inégalité $m > m'$ ait pour conséquence

$$(9)\qquad |S^{(i)}(x^0+h) - S_m^{(i)}(x^0+h, x^0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En réunissant les résultats (7), (8), (9) on arrive donc à cette

conclusion qu'il est possible de déterminer un nombre m' tel que l'inégalité $m > m'$ entraîne

$$|S(x^0 + h) - S_m(x^0 + h, x^0)| < \varepsilon.$$

La proposition suivante se démontrerait comme pour un nombre limité de variables :

Une série uniformément convergente dans un domaine A *et dont les termes sont des fonctions continues dans ce domaine y représente une fonction continue.*

8. *Fonctions analytiques.* — Les propriétés des fonctions analytiques peuvent s'étendre aux fonctions $f(x)$ d'une infinité de variables, uniformément convergentes dans un domaine A, et telles que $f_m(x^0 + h, x^0)$ soit une fonction analytique de $h_1, h_2, \ldots, h_m$, quelque grand que soit m. Nous dirons que toute fonction $f(x)$ possédant ces caractères est une fonction analytique de l'ensemble infini $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, dans le domaine considéré.

La fonction $f(x)$ étant uniformément convergente est développable en série normale :

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x) + \ldots.$$

Remplaçons-y x par $x^0 + th$ et supposons les h assez petits pour que les points $x^0 + th$ restent intérieurs au domaine A pour toutes les valeurs de t de module inférieur ou égal à *un*. La série

$$f(x^0 + th) = u_0(x^0 + th) + u_1(x^0 + th) + \ldots + u_n(x^0 + th) + \ldots$$

a pour termes des fonctions analytiques de t et, en y regardant t comme la seule variable, elle est uniformément convergente à l'intérieur du cercle de rayon *un*, ayant pour centre l'origine. Cette série représente donc une fonction analytique de t qu'on peut développer en série de Mac-Laurin. Le coefficient de t^p dans le développement est égal à l'intégrale de Cauchy

$$U_p(x^0, h) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x^0 + zh)}{z^{p+1}}\, dz,$$

évaluée suivant la circonférence de rayon *un* ayant pour centre l'origine ou suivant tout autre contour équivalent.

Nous allons faire voir que $U_p(x^0, h)$ *est une fonction uniformément convergente des h dans un domaine restreint.* Soit en effet $U_p^m(x^0, h, 0)$ l'expression obtenue en remplaçant par des zéros tous les h dont l'indice surpasse m. On a

$$U_p(x^0, h) - U_p^m(x^0, h, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(x^0 + zh) - f_m(x^0 + zh, x^0)}{z^{p+1}}\, dz.$$

Le module de la différence

$$f(x^0 + zh) - f_m(x^0 + zh, x^0)$$

reste inférieur à un nombre positif, ε_m, et l'intégration est effectuée suivant une circonférence de rayon *un*.

Il en résulte donc, d'après un théorème de M. Darboux :

$$\operatorname{mod}[U_p(x^0, h) - U_p^m(x^0, h, 0)] < \varepsilon_m.$$

Le nombre ε_m tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Notre proposition est donc démontrée.

La fonction $U_p^m(x^0, h, 0)$ est dérivée d'une fonction de m variables indépendantes, les variables dont l'indice est supérieur à m étant regardées comme des constantes.

On a donc

$$U_p^m(x^0, h, 0) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1^0} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2^0} + \ldots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^p f(x^0).$$

La fonction $U_p(x^0, h)$ étant la limite de $U_p^m(x_0, h, 0)$, lorsque m croît indéfiniment, nous poserons aussi

$$(10) \qquad U_p(x^0, h) = \left(\sum_0^\infty h_i \frac{\partial}{\partial x^0}\right)^p f(x^0).$$

En réunissant ces résultats, nous avons le théorème suivant :

La fonction analytique $f(x^0 + h)$ est développable dans un

domaine restreint en série uniformément convergente par la formule

$$f(x^0+h)=U_0(x^0)+U_1(x^0,h)+U_2(x^0,h)+\ldots+U_p(x^0,h)+\ldots,$$

le terme général $U_p(x_0,h)$ *de la série étant une fonction uniformément convergente des* h, *définie par l'égalité*

$$U_p(x^0,h)=\left(\sum_0^\infty {}^i h_i \frac{\partial}{\partial x_0^i}\right)^{(p)} f(x^0). \tag{11}$$

Je ne m'arrête pas à énumérer toutes les conséquences intéressantes que l'on pourrait déduire de ce théorème concernant les expressions infinies. Je me borne à signaler la suivante que l'on obtient par la considération du premier terme dépendant des h :

$$U_1(x^0,h)=\sum_0^\infty {}^i h_i \frac{\partial f}{\partial x_0^i}.$$

Soient A *un domaine restreint,* A′ *un domaine contenu dans* A ; *soient d'autre part* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, *des fonctions existant dans* A′ *et jouissant de la propriété suivante : à tout point* x *de* A′ *on peut faire correspondre un nombre positif* t_x *tel que le point* $(x+t\varphi)$ *ayant pour coordonnées*

$$x_1+t\varphi_1,\quad x_2+t\varphi_2,\quad \ldots,\quad x_n+t\varphi_n,\quad \ldots,$$

soit contenu dans A *pour toutes les valeurs de* t *dont le module est inférieur à* t_x. *La série*

$$\varphi_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+\varphi_n\frac{\partial f}{\partial x_n}+\ldots$$

est alors convergente dans le domaine A′, *si* $f(x)$ *désigne une fonction quelconque analytique dans* A.

9. *Propriétés des dérivées.* — On est conduit à d'intéressantes

propriétés des dérivées par la considération de la différence

$$f(x) - f_m(x, x^0) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots)$$
$$- f(x_1, \ldots, x_m, x^0_{m+1}, x^0_{m+2}, \ldots)$$

dont le module reste inférieur à une limite ε_m qui tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

Prenons la dérivée de cette différence par rapport à l'une des variables x_i, et distinguons deux cas :

1° $\qquad i \leq m$,

2° $\qquad i > m$.

Soit d'abord $i = m - \alpha$. Supposons que dans son plan la variable x_i soit représentée par un point situé à une distance supérieure ou égale à δ_i du contour de l'aire A_i.

Nous avons alors

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_{m-\alpha}} - \frac{\partial f_m(x, x^0)}{\partial x_{m-\alpha}} \right| \leq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m-\alpha}}.$$

D'où l'on déduit cette proposition :

Les dérivées d'une fonction analytique uniformément convergente sont elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes.

Si l'on a, en second lieu, $i = m + \alpha$, la dérivée $\frac{\partial f_m}{\partial x_{m+\alpha}}$ est nulle, et l'on se trouve conduit à l'expression d'une limite supérieure de la dérivée de la fonction $f(x)$

$$\left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_{m+\alpha}} \right| \leq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha}}.$$

La même méthode s'appliquerait évidemment aux dérivées d'ordre supérieur, et l'on trouverait

$$\text{mod} \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_n} f(x)}{\partial x^{p_1}_{m+\alpha} \partial x^{p_2}_{m+\alpha} \ldots \partial x^{p_n}_{m+\alpha}} \leq \frac{p_1! \, p_2! \ldots p_n!}{\delta^{p_1}_{m+\alpha} \delta^{p_2}_{m+\alpha} \ldots \delta^{p_n}_{m+\alpha}}.$$

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS QUI DÉPENDENT D'UNE INFINITÉ DE CONSTANTES ARBITRAIRES.

10. *Définition des ensembles de fonctions.* — Je considère des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, dépendant de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, en nombre illimité :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots) = \varphi_1(x, a), \\ z_2 = \varphi_2(x, a), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_p = \varphi_p(x, a). \end{array}\right.$$

Je suppose que toutes ces fonctions sont analytiques par rapport à la totalité des arguments x, a, dont elles dépendent, et uniformément convergentes dans un domaine restreint des a.

Les séries

$$(13)\qquad \delta z_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_k}\delta a_k + \ldots$$

admettent alors un domaine de convergence uniforme sans que les δa_i soient astreints à aucune condition exprimable par des égalités. Elles définissent donc de nouvelles fonctions analytiques uniformément convergentes des x, a, δa.

J'appelle *ensemble de fonctions* la totalité des fonctions du système (12) quand les constantes a parcourent les systèmes de valeurs dont elles sont susceptibles.

En attribuant aux constantes des valeurs déterminées, l'on a un système de p fonctions particulières constituant un *élément de l'ensemble*.

Un ensemble *est linéaire* quand les constantes y figurent linéairement. A tout élément de l'ensemble général (12) on peut faire correspondre un ensemble linéaire par les formules (13), dans lesquelles on regarde les δa comme arbitraires, les constantes a ayant reçu des valeurs

numériques déterminées. Nous dirons que cet ensemble linéaire et homogène est *associé* à l'élément considéré de l'ensemble (12).

Un ensemble linéaire et homogène est associé à tous ses éléments.

Nous allons nous occuper principalement des ensembles dont chaque élément est composé d'une seule fonction et nous commencerons par les ensembles linéaires et homogènes.

11. *Ensembles linéaires. Fonctions primaires.* — Considérons l'ensemble

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots \tag{14}$$

dans lequel on suppose que $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ sont des fonctions analytiques déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Nous les appellerons les *éléments fondamentaux* de l'ensemble.

Donnons aux constantes des valeurs telles que z et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement s'annulent au point de situation générale $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Au point de vue formel il existe toujours pour les constantes une infinité de valeurs satisfaisant à ces conditions; nous supposerons que les valeurs choisies conservent la convergence de l'expression (14). Nous dirons que l'élément considéré est un *élément d'ordre m* au point ξ. En le développant par la formule de Taylor suivant les puissances de $x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots, x_n - \xi_n$, on trouve pour l'ensemble des termes du moindre degré un polynome homogène d'ordre m par rapport aux différences $x - \xi$. Nous appellerons ce polynome la *fonction primaire* de l'élément.

Il existe en général une infinité d'éléments d'ordre m et aussi une infinité de fonctions primaires; mais le nombre des fonctions primaires d'ordre m linéairement indépendantes est nécessairement limité puisqu'il n'est jamais supérieur au nombre total des dérivées $m^{\text{ièmes}}$ d'une fonction de n variables, c'est-à-dire à $\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$.

S'il est toujours égal à ce maximum, quel que soit m, nous dirons que l'ensemble considéré est *maximum*.

Il sera toujours possible, dans ce cas, d'attribuer aux constantes des valeurs telles que z et ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque

prennent au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des valeurs arbitrairement données d'avance. On pourra donc trouver, dans l'ensemble, des fonctions z telles que la différence

$$z - F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

s'annule au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à un ordre désigné, aussi grand qu'on voudra, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant une fonction holomorphe arbitraire.

Sans rien préjuger sur la convergence nous pouvons dire que l'ensemble considéré embrasse alors *formellement* la totalité des fonctions holomorphes de n variables.

Dans ce cas il ne peut exister, entre les dérivées en nombre fini des fonctions de l'ensemble, aucune relation indépendante des a, exprimable par des équations analytiques.

On peut concevoir seulement des relations où figurent une infinité de dérivées ou qui soient exprimables par des équations fonctionnelles. Telles sont, par exemple, dans le champ des fonctions d'une seule variable, les fonctions paires, les fonctions périodiques, etc.

12. *Propriétés des fonctions d'un ensemble linéaire et homogène.* — Les fonctions d'un ensemble linéaire et homogène jouissent de quelques propriétés qui sont des conséquences immédiates de leur définition.

I. *Toute combinaison linéaire et homogène d'un nombre fini ou infini d'éléments de l'ensemble en est également un élément.*

On suppose, bien entendu, que si le nombre des éléments de l'expression considérée est infini, elle n'en conserve pas moins une signification et représente toujours une fonction analytique des variables x dans un domaine déterminé, toujours le même.

II. *Si l'on prend un élément z_m, d'ordre m au point ξ, les dérivées $\frac{\partial z_m}{\partial \xi_i}$ font partie de l'ensemble.*

Ces dérivées sont en général d'ordre $m - 1$ au point ξ.

III. *Toute dérivée non nulle d'une fonction primaire d'ordre m est égale à la fonction primaire d'un élément d'ordre inférieur.*

Soit en effet z_m un élément d'ordre m au point ξ, $\overline{z_m}$ sa fonction primaire; la dérivée $\frac{dz_m}{d\xi_i}$ a pour fonction primaire, au signe près, $\frac{d\overline{z_m}}{dx_i}$, à moins que cette dérivée ne soit nulle.

IV. *Toute combinaison linéaire et homogène à coefficients constants, non nulle, de fonctions primaires d'ordre m, est la fonction primaire d'un élément du même ordre.*

Par coefficients constants nous entendons évidemment des coefficients indépendants des x, mais pouvant dépendre des variables ξ.

15. *Équations primaires.* — Supposons que, pour un certain ordre m, le nombre des fonctions primaires linéairement indépendantes soit inférieur au maximum. Nous pourrons, dans ce cas, former une ou plusieurs équations linéaires aux dérivées partielles, vérifiées par toutes les fonctions primaires de cet ordre et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Chacune d'elles ne contient que des dérivées d'un même ordre;

2° Les coefficients sont indépendants des variables x, mais peuvent contenir les ξ;

3° Toute solution de ces équations, entière et homogène d'ordre m en $x - \xi$, est une fonction primaire.

Pour former ce système il suffit d'avoir l'expression générale des fonctions primaires d'ordre m. Calculons successivement les dérivées premières, secondes, ... Si les dérivées premières sont indépendantes nous passons aux dérivées secondes, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à des dérivées d'un certain ordre p qui ne soient plus linéairement indépendantes. Il existe alors entre elles un certain nombre de relations linéaires et homogènes que nous savons former. Les dérivées d'ordre $p+1$ vérifient le système déduit du précédent par différentiation, mais elles peuvent en outre être reliées par d'autres équations linéaires qui n'en soient pas des conséquences.

En procédant ainsi de proche en proche, nous construirons les équa-

tions que nous avons définies et auxquelles nous donnons le nom d'*équations primaires* relatives à l'ordre m.

A la rigueur on pourrait se contenter de former les équations d'ordre m de ce système, mais il est utile, pour notre but, d'avoir un système formé par les équations de l'ordre le moins élevé possible et dont toutes les autres se déduisent par différentiation.

Les équations primaires relatives à l'ordre m sont de la forme suivante

$$(15)\qquad \sum A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\bar{u}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} = 0 \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = r)$$
$$r \leqq m,$$

$\bar{u}$ désignant la fonction primaire, r l'ordre de l'équation considérée, les coefficients A étant des fonctions des variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

14. *Caractéristiques.* — Prenons une équation primaire relative à l'ordre m et remplaçons-y les dérivées $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ par les produits $h_1^{\alpha_1}h_2^{\alpha_2}\ldots h_n^{\alpha_n}$ de nouvelles variables $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Nous obtenons alors un polynome homogène d'ordre r, $P(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ que nous appelons un *polynome caractéristique* relatif aux éléments d'ordre m. Ce nom, emprunté à la théorie des équations aux dérivées partielles, va se trouver justifié dans la suite.

Pour avoir une image géométrique des équations de la forme

$$(16)\qquad P(h_1, h_2, \ldots, h_n) = 0,$$

considérons, dans l'espace à n dimensions, un plan passant au point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, et ayant pour équation

$$(17)\qquad h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n) = 0.$$

Nous appelons *élément caractéristique* relatif à l'ordre m, au point ξ, tout plan dont les coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vérifient l'ensemble des équations de la forme (16).

La détermination de l'ensemble des éléments caractéristiques est un problème purement algébrique qui revient à la recherche des solutions

communes aux équations (16). On sait que ces solutions constituent un ensemble complexe auquel correspondent des variétés à une ou plusieurs dimensions tangentielles homogènes [1].

Il peut y avoir par exemple : 1° une variété à $n-1$ dimensions tangentielles homogènes de classe γ_{n-1}, qui correspond à un facteur commun de tous les polynomes P; 2° une variété à $n-2$ dimensions homogènes de classe $\gamma_{n-2}, \ldots$; en dernier lieu on aura un système de γ_1 plans distincts ou confondus. Je donne à cet ensemble d'éléments le nom de *complexe* [2] *caractéristique* relatif à l'ordre m. Les nombres $\gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_1$, toujours rangés dans le même ordre, s'appellent les *indices* du complexe.

Il y a équivalence complète, au point de vue des formes, entre les équations primaires et les polynomes P. D'autre part le complexe caractéristique étant connu, il est toujours possible de former un ensemble d'équations homogènes d'un ordre désigné r vérifié par tous les éléments caractéristiques, et tel en outre que toutes les autres équations d'ordre r vérifiées par ces éléments soient des combinaisons linéaires et homogènes des relations ainsi formées [3].

Il résulte immédiatement de là que la connaissance du complexe caractéristique relatif aux éléments d'un ordre donné détermine complètement les équations primaires correspondantes.

Donc :

Deux systèmes d'équations primaires ayant les mêmes éléments caractéristiques sont équivalents.

Les équations primaires sont susceptibles d'une interprétation géométrique. En égalant à zéro la fonction primaire d'un élément d'ordre m on a l'équation d'un cône dans l'espace à n dimensions.

---

(1) Le nombre de dimensions d'une variété désigne ici pour nous le nombre des *variables homogènes* dont dépend chaque élément de la variété.

(2) Nous employons ici le mot *complexe* parce qu'il s'agit d'une figure composée.

(3) Si r est inférieur à m il n'existe pas nécessairement d'équation d'ordre r de la nature indiquée. Mais quand il en existe on peut toujours les former.

Tous les cônes ainsi obtenus sont *apolaires* par rapport au complexe caractéristique correspondant.

Considérons, en particulier, les fonctions de deux variables indépendantes x et y; le complexe caractéristique se compose d'un système de droites concourantes. Si la courbe représentée par l'équation $z_m = 0$ possède au point ξ, η un point multiple d'ordre m, les m tangentes de la courbe en ce point forment un système *apolaire* par rapport aux droites caractéristiques. Lorsqu'il y a seulement deux droites caractéristiques les m tangentes considérées forment un système cyclo-projectif [1] ayant les caractéristiques pour rayons doubles : le rapport anharmonique du système formé par deux quelconques de ces tangentes et les deux droites caractéristiques est égal à une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

En particulier, lorsque les caractéristiques sont les droites isotropes, les tangentes à la courbe $z_m = 0$ forment une étoile régulière à m rayons.

15. *Changement du complexe caractéristique quand m varie.* — Pour étudier la modification que peut éprouver le complexe caractéristique quand on passe des éléments d'ordre m à ceux d'un ordre différent, nous nous appuierons sur la remarque suivante : lorsqu'une fonction v des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfait à un système d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles, dont les coefficients sont indépendants des variables, les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ vérifient le même système.

Il résulte immédiatement de là et des propriétés énoncées au n° **12** que :

Tout polynome homogène d'ordre $m-1$ en $x_1 - \xi_1$, $x_2 - \xi_2$, ..., qui satisfait au système des équations primaires relatives à l'ordre m, est une fonction primaire d'ordre $m-1$.

Par suite, tout élément caractéristique relatif à l'ordre m est aussi un élément caractéristique relatif à l'ordre $m-1$ avec un degré de multiplicité au moins égal.

---

[1] Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*. Trad. Benoist.

L'inverse n'a pas nécessairement lieu. Il peut exister des éléments caractéristiques relatifs à l'ordre $m-1$, qui cessent d'appartenir au complexe relatif à l'ordre m.

Il résulte de là que les fonctions primaires relatives à l'ordre m satisfont nécessairement aux équations primaires relatives à l'ordre $m-1$ et à celles qui s'en déduisent par différentiation relativement aux variables x. Mais elles peuvent vérifier en outre certaines équations primaires additionnelles qui ne soient pas des conséquences des précédentes.

Si ces équations nouvelles n'existent pas, le complexe caractéristique est le même pour l'ordre $m-1$ et pour l'ordre m. Si elles existent, il y a un *abaissement* du complexe caractéristique, en ce sens que certains ensembles d'éléments cessent d'en faire partie.

On arriverait au même résultat en partant de l'expression des fonctions primaires; l'expression

$$v_m = [h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n)]^m$$

représente une fonction primaire d'ordre m, pourvu que l'élément $h_1, h_2, \ldots, h_n$ soit caractéristique.

Si, de plus, les coordonnées $h_1, h_2, \ldots, h_n$ annulent non seulement les polynomes caractéristiques P, mais encore leurs dérivées partielles par rapport aux h jusqu'à un ordre donné $\mu-1$ inclusivement, c'est-à-dire si l'élément considéré est un élément caractéristique multiple d'ordre μ, les expressions de la forme

$$w_m = Q_{\mu-1}(x-\xi)[h_1(x_1-\xi_1)+h_2(x_2-\xi_2)+\ldots+h_n(x_n-\xi_n)]^{m-\mu},$$

où $Q_{\mu-1}$ désigne un polynome arbitraire homogène d'ordre $\mu-1$, représentent encore des fonctions primaires d'ordre m. Inversement, quand ces expressions représentent des fonctions primaires, l'élément $h_1, h_2, \ldots, h_n$ est un élément caractéristique d'ordre μ ou d'ordre supérieur.

En exprimant que les dérivées $\frac{dv_m}{dx_i}, \frac{dw_m}{dx_i}$ sont des fonctions primaires d'ordre $m-1$, on arrive encore aux conclusions énoncées plus haut.

16. *Indices caractéristiques et complexe caractéristique de l'ensemble.* — Considérons d'après cela l'ensemble $\gamma_{n-1}^m, \gamma_{n-2}^m, \ldots, \gamma_1^m$ des indices du complexe caractéristique relatif à l'ordre m. Le nombre γ_{n-1}^m ne peut augmenter, d'après ce qui précède, quand m croît, sans quoi il s'introduirait des éléments caractéristiques nouveaux; mais il peut arriver que le cône caractéristique de classe γ_{n-1}^m, à $(n-1)$ dimensions tangentielles homogènes, n'appartienne plus en totalité au complexe caractéristique relatif à l'ordre $m+1$.

S'il est irréductible et que l'un de ses éléments cesse d'être caractéristique pour l'ordre $m+1$, il n'y aura plus pour cet ordre, ni pour les ordres supérieurs, de multiplicité caractéristique à $n-1$ dimensions; mais certaines multiplicités à moins de $n-1$ dimensions tangentielles, précédemment situées sur la variété considérée, pourront conserver la propriété d'être caractéristiques et s'adjoindront aux suivantes, ce qui aura pour effet de faire croître les nombres $\gamma_{n-2}^m, \gamma_{n-3}^m, \ldots$. Si la multiplicité caractéristique de classe $n-1$ n'est pas irréductible, une ou plusieurs des parties irréductibles qui la constituent pourront disparaître du complexe, et il en résultera encore l'accroissement possible des nombres $\gamma_{n-2}^m, \gamma_{n-3}^m, \ldots$. Le même raisonnement s'applique aux variétés à moins de $n-1$ dimensions qui entrent dans la composition du complexe caractéristique. En résumé, nous arrivons donc au résultat suivant :

Lorsque m croît, aucun des indices caractéristiques ne peut augmenter, à moins que l'un des indices précédents ne diminue. En particulier, le premier indice γ_{n-1}^m ne peut croître.

Comme les valeurs des indices sont essentiellement positives ou nulles, il arrivera forcément qu'à partir d'une certaine valeur de m ils resteront tous constants.

Soient $\Gamma_{n-1}, \Gamma_{n-2}, \ldots, \Gamma_1$ les valeurs finales; il existe un complexe caractéristique ayant ces nombres pour indices et qui est contenu dans les complexes relatifs à tous les ordres sans exception. Nous l'appelons pour cette raison le *complexe caractéristique* de l'ensemble. A partir d'une certaine valeur de m, le complexe caractéristique relatif à l'ordre m se réduit au complexe commun et le système fondamental des équations primaires reste le même, ou plus exactement, il ne s'y

introduit d'autres équations nouvelles que celles qui se déduisent par différentiation des équations d'ordre inférieur.

Pour les fonctions de deux variables indépendantes, il n'existe qu'un seul indice caractéristique Γ, que nous appellerons *la classe* [1] de l'ensemble.

17. *Équations aux dérivées partielles de l'ensemble.* — Les fonctions de l'ensemble considéré satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles que nous allons former, et dont les résultats précédents indiquent des caractères généraux.

Supposons qu'on ait disposé des constantes $a_1, a_2, \ldots$ de manière que la fonction

$$z = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots$$

s'annule au point de *situation générale* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement. Soit, d'autre part, $P_m(\overline{u}) = 0$ une équation primaire d'ordre m et relative aux éléments du même ordre au point ξ. Cette expression $P_m(\overline{u})$ est une combinaison linéaire quelconque des équations primaires fondamentales et de leurs dérivées, ne contenant que les dérivées d'ordre m de la fonction $\overline{u}$. Elle s'annule au point ξ quand on remplace $\overline{u}$ par un élément arbitraire z_m d'ordre m.

D'après cela, le système suivant d'équations linéaires dans lequel on regarde $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ comme les inconnues, et où l'on a donné aux x les valeurs ξ :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k + \ldots \\ 0 = a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \cdots + a_k \dfrac{\partial u_k}{\partial \xi_1} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = a_1 \dfrac{\partial^{m-1} u_1}{\partial \xi_n^{m-1}} + a_2 \dfrac{\partial^{m-1} u_2}{\partial \xi_n^{m-1}} + \cdots + a_k \dfrac{\partial^{m-1} u_k}{\partial \xi_n^{m-1}} + \cdots \end{array}\right.$$

---

[1] LIE, *Leipz. Berichte*, 1895, p. 113. L'identité de signification est déjà évidente.

entraîne comme conséquence

$$(19) \qquad 0 = a_1 P_m(u_1) + a_2 P_m(u_2) + \ldots + a_k P_m(u_k).$$

On suppose bien entendu que, dans cette dernière équation, on a également donné aux x les valeurs ξ. Comme les éléments fondamentaux u ne dépendent pas des ξ, il est indifférent de faire la substitution avant ou après la différentiation.

Les équations (18) et (19) contiennent une infinité d'inconnues, mais on peut se borner à en considérer un nombre limité p que l'on fera ensuite croître indéfiniment.

Rien ne s'oppose donc à l'application de la théorie générale des formes linéaires.

Formons la matrice infinie

$$(M) \qquad \begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) & \ldots & u_k(\xi) & \ldots \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \ldots & \frac{\partial u_k}{\partial \xi_1} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial^{m-1} u_1}{\partial \xi_n^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} u_2}{\partial \xi_n^{m-1}} & \ldots & \frac{\partial^{m-1} u_k}{\partial \xi_n^{m-1}} & \ldots \\ P_m(u_1) & P_m(u_2) & \ldots & P_m(u_k) & \ldots \end{vmatrix}.$$

Comme l'équation (19) est une conséquence du système (18), les éléments de la dernière ligne de la matrice (M) sont des combinaisons linéaires et homogènes des éléments correspondants des lignes précédentes.

Il existe donc au moins une relation linéaire de la forme.

$$(20) \qquad \begin{cases} P_m(u) + \Sigma B_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} u(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \partial \xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}} = 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < m). \end{cases}$$

qui est vérifiée par tous les éléments fondamentaux de l'ensemble et, par conséquent, par tous les éléments. C'est une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène, d'ordre m, dans laquelle on peut évidemment remplacer les ξ par les x.

Le nombre des équations linéairement indépendantes par rapport aux dérivées d'ordre m que l'on obtient ainsi est égal au nombre des équations primaires indépendantes de l'ordre considéré. Il est donc entièrement déterminé par le complexe caractéristique correspondant. Il n'existe pas d'autres relations d'ordre m vérifiées par toutes les fonctions de l'ensemble, car en supposant nulles toutes les dérivées d'ordre inférieur à m, on ne doit trouver d'autres relations que celles qui se déduisent des équations primaires.

Nous avons donc le moyen de former progressivement pour les valeurs croissantes de m les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes auxquelles satisfont les fonctions de l'ensemble.

Supposons que nous ayons construit les équations d'ordre m et d'ordre inférieur; passons aux équations d'ordre $m+1$. Parmi les équations primaires relatives aux éléments d'ordre $m+1$, se trouve le système formé par les dérivées des équations primaires relatives aux éléments d'ordre m. Si le complexe caractéristique reste le même, toutes les équations primaires d'ordre $m+1$ se trouvent formées ainsi, et, dans ce cas, toutes équations aux dérivées partielles d'ordre $m+1$ de notre système s'obtiendront par des combinaisons linéaires des équations d'ordre inférieur et de leurs dérivées. Si, au contraire, l'un des indices diminue, c'est qu'il s'est adjoint au système précédent des équations nouvelles qui n'en sont pas des conséquences. A partir du moment où les indices caractéristiques restent constants, il ne s'ajoute plus aucune équation étrangère, le système est *complet*.

Notre ensemble linéaire de fonctions constitue, pour le système correspondant d'équations aux dérivées partielles, une intégrale générale au sens d'Ampère. D'après la manière dont nous avons procédé pour former ce système, il est visible, en effet, qu'il n'existe pas d'autres équations linéaires vérifiées par toutes les fonctions de l'ensemble. Il n'y a pas non plus d'équations non linéaires distinctes de celles que l'on pourrait former par la combinaison des équations de notre système, car des formes linéaires sont *absolument indépendantes* dès qu'elles sont linéairement indépendantes.

Nous trouvons en définitive le théorème suivant :

A tout ensemble linéaire de fonctions analytiques on peut faire

correspondre un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles dont l'ensemble considéré constitue une intégrale générale au sens d'Ampère.

18. *Solutions d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles.* — Réciproquement, à tout système *passif* (au sens de MM. Méray et Riquier) d'équations linéaires aux dérivées partielles, on peut faire correspondre un ensemble linéaire convergent de fonctions, car les intégrales du système s'expriment linéairement à l'aide de valeurs que prennent en un point arbitraire les dérivées *paramétriques*, et, de plus, ce sont des fonctions uniformément convergentes de ces paramètres dans un domaine restreint.

La *mesure de la généralité* ou le *degré d'indétermination* des solutions peut être défini par le nombre des dérivées de chaque ordre que l'on peut choisir arbitrairement. Or, considérons les équations primaires relatives à l'ordre m et amenons-les toutes à être d'ordre m par des différentiations. Le nombre des équations distinctes que l'on obtient est précisément égal au nombre des relations distinctes existant entre les dérivées d'ordre m et les dérivées d'ordre inférieur. Les deux systèmes ainsi considérés : d'une part, le système proposé, et, d'autre part, le système des équations primaires des différents ordres, ont entre eux la même correspondance que deux systèmes d'équations linéaires ordinaires de même déterminant dont le premier serait quelconque tandis que le second serait homogène.

Il en résulte que, pour avoir la mesure de la généralité et même les caractères principaux de l'indétermination, il est permis de remplacer les équations du système proposé par les équations primaires, en ayant soin de ramener toutes les équations primaires relatives à l'ordre m à être elles-mêmes d'ordre m.

Les indices caractéristiques de l'ensemble définissent le nombre et la nature des fonctions arbitraires qui déterminent l'intégrale. Il y aura Γ_{n-1} fonctions de $(n-1)$ variables, Γ_{n-2} fonctions de $(n-2)$ variables, etc. Le complexe caractéristique donne ainsi une image très nette de l'indétermination du système.

Quant aux constantes qui achèvent de déterminer la solution, leur nombre dépend des différences successives des indices γ_i^m relatifs aux

différents ordres. Il y aurait peut-être avantage à remplacer, au point de vue de l'énumération, la considération des constantes par celle de polynomes d'un nombre donné de variables et d'un ordre déterminé. On pourrait dire, par exemple, que l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre m est déterminée par un polynome d'ordre $m+1$ dans le voisinage d'un point z_0.

Nous ne développerons pas ces considérations dont nous n'aurons pas à faire l'application dans ce travail.

Signalons, pour terminer, cette simple remarque : lorsque le système proposé se réduit à une équation unique et à celles qui s'en déduisent par différentiation, le complexe caractéristique se réduit à un cône à $(n-1)$ dimensions tangentielles homogènes et dont la classe est égale à l'ordre de l'équation de base. Supposons ce cône indécomposable algébriquement. Alors, *toute autre équation linéaire ayant en commun avec la proposée un ensemble d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire de $(n-1)$ variables en admet toutes les intégrales.*

19. *Ensembles non linéaires.* — Considérons maintenant un ensemble non linéaire défini par l'équation

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots), \tag{21}$$

la fonction φ étant supposée analytique et uniformément convergente par rapport aux a, dans un domaine restreint.

Différentions z par rapport aux x et désignons par $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$ la suite formée par z et ses dérivées rangées par ordre croissant, les dérivées d'un même ordre étant d'ailleurs placées d'une manière quelconque. Prenons toutes les dérivées jusqu'à un ordre déterminé p inclusivement et formons avec ces éléments la matrice suivante :

$$\left|\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial u_1}{\partial a_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial a_\mu} & \cdots \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial a_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial a_\mu} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial a_1} & \dfrac{\partial u_p}{\partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial a_\mu} & \cdots \end{array}\right| . \tag{22}$$

Si tous les déterminants d'ordre p de cette matrice ne sont pas nuls identiquement, on pourra trouver des valeurs des constantes donnant aux fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots$ des valeurs désignées d'avance en un point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, de situation générale, sauf les relations d'inégalités relatives à la limitation du domaine, qu'on pourrait être amené à écrire pour que la fonction ξ existe.

Faisons croître m; la même circonstance peut se présenter indéfiniment; dans ce cas, nous dirons encore que l'ensemble considéré est maximum. Sinon, nous arriverons à un certain ordre pour lequel tous les déterminants d'ordre p de la matrice (22) sont nuls. Il existe alors, entre les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_p$, des relations indépendantes des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_\mu, \ldots$; ces relations sont des équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions de l'ensemble.

L'ensemble linéaire associé à chaque élément de l'ensemble (21) donne lieu à la considération de la même matrice (22). En effet, les éléments fondamentaux de cet ensemble

$$\frac{\partial z}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial a_2}, \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial a_\mu}, \quad \ldots$$

et leurs dérivées par rapport aux x sont précisément les éléments de la matrice. Prenons donc, dans cette matrice, q lignes satisfaisant aux conditions suivantes : 1° les déterminants d'ordre q déduits de ces q lignes sont tous nuls; 2° certains déterminants d'ordre $q-1$ formés avec les $(q-1)$ premières sont différents de zéro. Il existe alors entre les éléments correspondants des q lignes considérées une relation linéaire unique

$$(23) \qquad A_1 \frac{\partial u_{x_1}}{\partial a_i} + A_2 \frac{\partial u_{x_2}}{\partial a_i} + \ldots + A_q \frac{\partial u_{x_q}}{\partial a_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_q$ désignant des fonctions des x et des a.

C'est l'une des équations linéaires auxquelles satisfont les éléments de l'ensemble linéaire associé. Mais, d'un autre côté, les mêmes conditions expriment qu'il existe entre les fonctions $u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_q}$ une

relation unique, indépendante des a,

$$(24) \qquad f(u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_q}, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

d'où l'on déduit les relations

$$(25) \qquad \frac{\partial f}{\partial u_{x_1}}\frac{\partial u_{x_1}}{\partial a_i} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_2}}\frac{\partial u_{x_2}}{\partial a_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_{x_q}}\frac{\partial u_{x_q}}{\partial a_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, \varkappa).$$

La relation (23) étant unique est équivalente à (25).

Donc :

A toute équation linéaire vérifiée par la totalité des éléments de l'ensemble linéaire associé à un élément général de l'ensemble considéré correspond une équation aux dérivées partielles unique à laquelle satisfont les éléments de ce dernier ensemble, et réciproquement.

L'équation (25) appartient au *système auxiliaire* de M. Darboux. On peut l'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial u_{x_1}}\delta u_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_{x_2}}\delta u_{x_2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_{x_q}}\delta u_{x_q} = 0.$$

Ces résultats ne s'appliquent bien entendu qu'aux éléments généraux de l'ensemble. Il peut exister des éléments singuliers pour lesquels certaines équations de la forme (23) s'évanouiraient identiquement, et la correspondance que nous avons établie cesserait alors d'être complète.

Quand on s'en tient aux éléments généraux, la mesure de l'indétermination de l'ensemble linéaire associé est donc la même que celle de l'ensemble non linéaire proposé, et la considération du système auxiliaire de M. Darboux permet d'appliquer aux ensembles généraux quelques-unes des propriétés des ensembles linéaires.

Nous avons en particulier le théorème suivant :

A tout ensemble non maximum de fonctions analytiques on peut

faire correspondre un système fini d'équations aux dérivées partielles, dont cet ensemble constitue une intégrale générale au sens d'Ampère.

Le degré de généralité des solutions de ce système est défini par les équations primaires relatives à l'ensemble linéaire associé à l'un quelconque de ses éléments généraux, ou, ce qui revient au même, par les complexes caractéristiques des équations du système auxiliaire de M. Darboux.

La réciproque est évidente. Les solutions d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles analytiques étant elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes des constantes initiales, forment des ensembles généraux de la nature de ceux que nous venons d'étudier.

Les propriétés générales des équations aux dérivées partielles, que nous avons rencontrées au courant de cette étude, ne sont évidemment pas essentiellement nouvelles, mais il nous a paru intéressant de les retrouver en partant de la considération de nos ensembles de fonctions dépendant d'une infinité de paramètres variables. Il est remarquable que des lois si simples et si régulières aient pu se dégager de la considération de ces expressions infinies, qui eussent semblé d'abord devoir être rebelles à toute règle.

20. *Ensembles dont chaque élément comprend plusieurs fonctions.* — Il resterait maintenant à faire l'étude des ensembles dont chaque élément comprend plusieurs fonctions. Il est évident que les mêmes méthodes sont encore applicables.

D'ailleurs, on peut toujours, *avec* ou *sans* addition d'une variable indépendante nouvelle, exprimer tous les éléments à l'aide d'une fonction unique et de ses dérivées en nombre limité. Considérons, par exemple, r fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_r$.

Posons

$$\zeta = z_1 + z_2 x_{n+1} + z_3 x_{n+1}^2 + \ldots + z_r x_{n+1}^{r-1};$$

les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_r$ s'expriment immédiatement à l'aide de ζ et de ses dérivées par rapport à x_{n+1}.

Nous nous bornons à ces indications, le présent travail étant spécialement consacré à l'étude des équations qui ne contiennent qu'une fonction inconnue.

CHAPITRE III.

LES GROUPES GÉNÉRAUX ET LES FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

21. *Forme des systèmes.* — Nous allons maintenant prendre comme point de départ un système donné d'équations aux dérivées partielles, à une seule fonction inconnue z et à n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous le supposerons prolongé indéfiniment par différentiation et les équations qui le composent écrites suivant l'ordre croissant, de telle façon que toute relation entre les dérivées d'ordre m et d'ordre inférieur qu'on pourrait en déduire par des différentiations et par la combinaison des résultats obtenus soit une conséquence *algébrique* des équations d'ordre m et d'ordre inférieur *écrites* dans le système.

Nous l'appellerons le *système* S et nous en représenterons les équations par la forme condensée

$$(S)\qquad \begin{cases} f(x, z, p) = 0, \\ \left(p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right). \end{cases}$$

Il y a lieu d'y adjoindre le système auxiliaire de M. Darboux

$$(S')\qquad \delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \sum \frac{\partial f}{\partial p}\delta p = 0$$

qui définit les *variations* infiniment petites du premier ordre de chaque intégrale du système S quand on suppose égales à zéro les variations des variables indépendantes.

Le système S' est à proprement parler inséparable du système S et doit être regardé comme constituant avec ce dernier un système unique S_1 à deux fonctions inconnues z et δz.

22. *Le groupe* G_1. — Soit

$$z = \varphi(x, x^0, u^0) \tag{26}$$

la valeur de l'intégrale z exprimée en fonction des variables indépendantes x, de leurs valeurs initiales x^0 et des valeurs initiales u^0 des paramètres fondamentaux. Les paramètres fondamentaux étant des fonctions de variables x, z, p, on peut déduire leur expression de celle de la fonction inconnue z. Soit

$$u_i = \varphi_i(x, x^0, u^0). \tag{27}$$

Remplaçons dans ces équations x_k par $x_k^0 + h_k$ et considérons le système

$$\begin{cases} x_k = x_k^0 + h_k, \\ u_i = F_i(h, x^0, u^0). \end{cases} \tag{28}$$

On peut le regarder comme définissant un groupe de transformations G_1 à n paramètres $h_1, h_2, \ldots, h_n$ dans lequel les éléments transformés forment une suite infinie. Les transformations de ce groupe sont deux à deux inverses, et aux valeurs $h_i = 0$ correspond la transformation identique.

Le groupe G_1 admet des transformations infinitésimales. En prenant le développement de u_i suivant les puissances de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et en se bornant aux termes du premier ordre on a

$$u_i = u_i^0 + \varphi_{i,1}^0 h_1 + \varphi_{i,2}^0 h_2 + \ldots + \varphi_{i,n}^0 h_n + \ldots$$

les quantités $\varphi_{i,1}^0, \varphi_{i,2}^0, \ldots, \varphi_{i,n}^0$ étant des fonctions des variables x^0 et u^0. Nous désignerons par $\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \ldots, \varphi_{i,n}$, les fonctions analogues exprimées à l'aide des variables x, u. Elles jouissent de la propriété importante que voici :

Si u_i est un élément d'ordre m, les fonctions φ_i correspondantes ne dépendent pas des paramètres d'ordre supérieur à $n + 1$.

Cela posé, les transformations infinitésimales du groupe G_1 sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des sui-

vantes :

$$(29)\quad \begin{cases} U_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum v_{i,1}\dfrac{\partial f}{\partial u_i}, \\ U_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \sum v_{i,2}\dfrac{\partial f}{\partial u_i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ U_n(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum v_{i,n}\dfrac{\partial f}{\partial u_i}. \end{cases}$$

Ces transformations infinitésimales dépendent en général d'une infinité de variables x, u; mais il n'y a à cela aucun inconvénient d'après la théorie générale que nous avons esquissée au premier Chapitre.

Il est évident que les opérations $U_1(f)$, $U_2(f)$, ..., $U_n(f)$ ne sont autre chose que des symboles de différentiation par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, quand on regarde les u comme des fonctions des x définies par les équations (28).

On a, par conséquent, $(U_i, U_k)f = 0$. Quand on considère les fonctions exprimées, non plus à l'aide des paramètres fondamentaux, mais à l'aide de z et de ses dérivées, il y a lieu d'envisager, au lieu des opérations $U_i(f)$, les opérations suivantes dont la signification est analogue :

$$(30)\quad \begin{cases} X_1(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum p_{\alpha_1+1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}\dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}}, \\ X_2(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \sum p_{\alpha_1,\alpha_2+1,\dots,\alpha_n}\dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \sum p_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n+1}\dfrac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}} \\ \qquad (z = p_{0,0,\dots,0}). \end{cases}$$

25. *Invariants du groupe* G_1. — Le groupe G_1 est évidemment intransitif; nous pouvons même dire infiniment intransitif, car il possède une infinité d'invariants indépendants. Il est facile d'en former un système fondamental.

Donnons, dans les équations (28), aux variables indépendantes des valeurs numériques déterminées, $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Éliminons dans cette hypothèse les paramètres $h_1, h_2, \dots, h_n$ entre les équations consi-

dérées, et remplaçons les variables initiales x^0, u^0 par x, u. Les valeurs que prennent les fonctions F :

$$I_p = F_p(x' - x, x, u)$$

forment évidemment un système fondamental d'invariants, car la connaissance des valeurs des paramètres fondamentaux en un point x' suffit pour en déterminer les valeurs en tout autre point et, par conséquent, tous les autres invariants contenant uniquement les x et les u seront des fonctions des invariants I_p. On voit que notre système fondamental est simplement constitué par les valeurs (28) des paramètres fondamentaux dans lesquelles on donne aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs numériques déterminées, tandis que l'on considère comme éléments variables les valeurs initiales x^0, u^0.

Ces invariants et, en général, tous ceux que l'on pourrait former de quelque manière que ce soit, présentent l'inconvénient de dépendre d'une infinité d'éléments variables. Les cas où il existe des invariants dépendant d'un nombre limité de paramètres fondamentaux sont exceptionnels dans le domaine des équations à plusieurs variables indépendantes. Il est d'ailleurs facile de reconnaître si un système donné admet des invariants contenant les dérivées jusqu'à un ordre déterminé m inclusivement ou de construire *a priori* des exemples de pareils systèmes.

24. *Le groupe* G. — Les invariants I_p et ceux qui s'en déduisent sont les seuls invariants du groupe G_1 qui contiennent *uniquement* les x et les u; mais ils sont insuffisants pour caractériser entièrement ce groupe; ils définissent, en effet, un groupe plus général G, contenant G_1 et dont les transformations infinitésimales sont de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_n U_n,$$

en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des fonctions arbitraires des x et des u.

Le groupe G jouit de la propriété caractéristique de laisser les intégrales invariantes. Tout autre groupe possédant la même propriété admet, outre les invariants I_p, des invariants différentiels obtenus en

regardant les x et les u comme des fonctions de certaines variables, ou même encore d'autres invariants contenant seulement les x et les u.

25. *Transformation des variables initiales.* — A côté des transformations qui laissent les intégrales invariantes il y a lieu de considérer celles qui les transforment les unes dans les autres.

Soit

$$z = \varphi(x, x^0, u^0)$$

l'expression de l'intégrale générale. En effectuant sur les variables initiales une transformation quelconque

$$x_k'^0 = \psi_k(x^0, u^0),$$
$$u_i^0 = \theta_i(x^0, u^0),$$

on obtient une nouvelle intégrale, transformée de la première,

$$z' = \varphi(x, x'^0, u'^0).$$

A un système de variations infiniment petites

$$\delta x_k^0 = \xi_k^0 \delta t, \qquad \delta u_i^0 = \eta_i^0 \delta t,$$

correspond une variation infiniment petite de z :

$$\delta z = \delta t \left\{ \sum \xi_k^0 \frac{\partial z}{\partial x_k^0} + \sum \eta_i^0 \frac{\partial z}{\partial u_i^0} \right\},$$

intégrale du système auxiliaire de M. Darboux.

Soient T_r^0 et T_s^0 deux transformations infinitésimales quelconques relatives aux variables initiales, x^0, u^0, et

$$T_r^0 z = \sum \xi_{kr}^0 \frac{\partial z}{\partial x_k^0} + \sum \eta_{ir}^0 \frac{\partial z}{\partial u_i^0},$$
$$T_s^0 z = \sum \xi_{ks}^0 \frac{\partial z}{\partial x_k^0} + \sum \eta_{is}^0 \frac{\partial z}{\partial u_i^0},$$

les variations infinitésimales correspondantes de z. On en déduit, par la méthode de Lie, la transformation infinitésimale (T_r^0, T_s^0), à laquelle

correspond une nouvelle intégrale du système auxiliaire

$$(T_r^0, T_s^0)z = T_r^0 T_s^0 z - T_s^0 T_r^0 z.$$

Supposons que l'une de ces transformations, T_r^0 par exemple, appartienne au groupe G, défini au numéro précédent, et qui laisse les intégrales invariantes. On a alors

$$T_r^0 z = 0$$

et la transformation infinitésimale précédente se réduit à

$$T_r^0 T_s^0 z.$$

D'où ce théorème :

Quand on effectue sur une intégrale $T_s^0 z$ *du système auxiliaire, associé à l'intégrale générale du système* S, *une transformation infinitésimale quelconque du groupe* G, *on obtient une nouvelle intégrale du système auxiliaire.*

Ce théorème peut être regardé comme une extension aux ensembles généraux de la remarque si simple qui nous a servi de base pour la théorie des ensembles linéaires.

26. *Le groupe* K. — A tout groupe de transformations des variables x^0, u^0 correspond un groupe de transformations des intégrales, mais les propriétés afférentes à ces groupes ne sont pas, en général, des propriétés *intrinsèques* des intégrales, *indépendantes du mode de définition*. Elles se rapportent plutôt à la manière d'être, à l'*allure* des intégrales dans le voisinage du point initial x^0. Pour que la trace des variables initiales disparaisse il faut que les transformations considérées satisfassent à la condition suivante :

Soient x, u, x^1, u^1, deux systèmes différents d'éléments appartenant à la même intégrale, les deux systèmes transformés correspondants, x', u' et x'^1, u'^1, devront aussi appartenir à une même intégrale généralement distincte de la première.

Supposons que les deux systèmes d'éléments x, u, et x^1, u^1 soient

infiniment voisins, posons alors

$$x' = x + dx, \qquad u' = u + du.$$

Pour que les deux systèmes considérés appartiennent à la même intégrale il faut et il suffit qu'on ait les relations suivantes :

$$(31) \qquad du_i = \sum c_{ik}\, dx_k,$$

qui devront entraîner, comme conséquences, les équations analogues

$$du'_i = \sum c'_{ik}\, dx_k.$$

Nous sommes donc amenés à cette conclusion :

Les seules transformations auxquelles puissent correspondre des propriétés des intégrales indépendantes des variables initiales sont celles qui conservent l'ensemble des équations (31).

L'ensemble de ces transformations forme un groupe K que nous appellerons le *groupe général des transformations des intégrales du système* S, ou simplement le *groupe général du système* S.

Il est indifférent d'effectuer les transformations de ce groupe sur les variables initiales x^0, u^0 ou sur les variables courantes x, u. Le résultat est toujours le même.

Le groupe général K contient évidemment le groupe G déjà défini, qui laisse les intégrales invariantes.

27. *Conditions auxquelles doivent satisfaire les transformations infinitésimales du groupe* K. — Soit δx, δu, un système de variations infiniment petites appartenant au groupe K. D'après la propriété qui nous a servi de définition on doit avoir, pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$(32) \qquad \delta\left(du_i - \sum c_{ik}\, dx_k\right) = \sum \lambda_{ij}\left(du_j - \sum c_{jk}\, dx_k\right)$$

les λ_{ij} désignant des fonctions infiniment petites du même ordre que les variations δx, δu. En calculant successivement les différents termes du premier membre on a

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\, du_i &= d\,\delta u_i = \sum_h \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} dx_h + \sum_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_j} du_j, \\ \delta\, dx_k &= d\,\delta x_k = \sum_h \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h} dx_h + \sum_j \frac{\partial \delta x_k}{\partial u_j} du_j, \\ \delta v_{ik} &= \qquad\quad \sum_h \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h}\, \delta x_h + \sum_j \frac{\partial v_{ik}}{\partial u_j} \delta u_j, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\left(du_i - \sum_k v_{ik}\, dx_k\right) &= \sum_j \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial u_j} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial u_j}\right) du_j \\ &\quad + \sum_h \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} - \delta v_{ih} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h}\right) dx_h. \end{aligned}\right.$$

En identifiant les relations (32) et (34) on trouve les relations suivantes :

$$(35)\qquad \lambda_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial u_j} - \sum v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial u_j},$$

$$(36)\qquad -\sum_j \lambda_{ij} v_{jh} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} - \delta v_{ih} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h}.$$

On peut donner à ces formules une forme élégante et simple en introduisant l'opération Δf définie par l'identité

$$(37)\quad \Delta f = \delta f - \sum_k U_k(f)\, \delta x_k = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_h} \delta x_h + \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i\right) - \sum_k U_k(f)\, \delta x_k.$$

On a, en particulier,

$$\Delta x_h = 0, \qquad \Delta u_i = \delta u_i - \sum_k v_{ik}\, \delta x_k,$$

ce qui permet de mettre l'identité (37) sous la forme

$$(38)\qquad \Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \Delta u_i.$$

L'équation (35) donne alors

$$(39)\qquad \lambda_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial u_j} + \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial u_j}\,\delta x_k.$$

Pour transformer l'équation (36) résolvons-la d'abord par rapport à δv_{ih} :

$$\delta v_{ih} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} + \sum_j \lambda_{ij} v_{jh} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h}.$$

Portons dans cette expression la valeur de λ_{ij} donnée par l'équation (39) et tenons compte en outre de l'identité

$$\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_h} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_h} - \sum_k v_{ik} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h} - \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h}\,\delta x_k.$$

Nous trouvons

$$(40)\qquad \frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_h} + \sum_j v_{jh} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial u_j} = \sum_k v_{ik} \sum_j \frac{\partial v_{jk}}{\partial x_h}\,\delta x_j + \sum_k \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h}\,\delta x_k - \delta v_{ih}.$$

Le coefficient de δx_k dans le premier membre a pour valeur

$$\frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} + \sum_j v_{jh} \frac{\partial v_{ik}}{\partial x_h} = U_h(v_{ik}) = U_h[U_k(u_i)].$$

Mais les opérations U_h, U_k étant permutables, on peut écrire

$$U_h(v_{ik}) = U_h U_k(u_i) = U_k U_h(u_i) = U_k v_{ih}.$$

L'équation (40) devient donc

$$U_h \Delta(u_i) + \sum_k U_k(v_{ih})\,\delta x_k = \delta v_{ih}$$

ou bien

$$(41)\qquad U_h \Delta(u_i) = \delta v_{ih} - \sum_k U_k(v_{ih})\,\delta x_k = \Delta v_{ih}.$$

ou encore, sous une forme plus significative :

$$(42) \qquad U_h \Delta(u_i) = \Delta U_h(u_i).$$

Donc :

Les opérations U_h et Δ, *appliquées aux variables* u, *sont permutables.*

Elles le sont également quand on les applique à des fonctions quelconques, comme on le voit immédiatement en formant l'expression

$$U_h \Delta f - \Delta U_h f.$$

Ce résultat pouvait être prévu. C'est la traduction algébrique de la propriété caractéristique du groupe K de remplacer les intégrales les unes par les autres.

Dans tout ce qui précède, les δ ont la signification de variations infiniment petites; cependant, on peut aussi les considérer comme des quantités finies. Si l'on a, par exemple,

$$\delta x_k = \xi_k \delta t, \qquad \delta u_i = \eta_i \delta t,$$

il n'y a aucun inconvénient à remplacer δx_k par ξ_k et δu_i par η_i, à cause de la forme homogène des expressions considérées. Nous conserverons les notations δx_k et δu_i au lieu de $\frac{\delta x_k}{\delta t}$, $\frac{\delta u_i}{\delta t}$, pour la simplicité de l'écriture, mais nous admettrons qu'on puisse leur attribuer des valeurs d'un ordre de grandeur quelconque.

28. *Fonctions génératrices des transformations infinitésimales.* — La permutabilité des opérations U et Δ permet de calculer les différentes expressions Δu_i quand Δz est supposé connu.

Soit en effet

$$p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

on peut écrire

$$p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} z,$$

les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ indiquant, bien entendu, la répétition des opérations considérées.

On tire de là, en vertu de l'équation (42),

$$(43) \qquad \Delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = \Gamma_1^{\alpha_1} \Gamma_2^{\alpha_2} \ldots \Gamma_n^{\alpha_n} \Delta z.$$

D'autre part, les u_i sont des fonctions des z, des p et des x; soit

$$u_i = \varphi_i(x, z, p).$$

On a alors

$$(44) \qquad \Delta u_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \Delta z + \Sigma \frac{\partial \varphi_i}{\partial p} \Delta p.$$

La fonction Δz dépend en général d'une infinité de variables x, u: par ailleurs, au point de vue de son rôle dans la génération des transformations infinitésimales, elle présente une analogie évidente avec celle que Lie représente par le symbole W dans la théorie des transformations de contact, et qu'il appelle la *fonction caractéristique* [1]. Nous dirons pour cette raison que Δz est la *fonction caractéristique* ou la *fonction génératrice* de la transformation infinitésimale considérée.

Le mot *caractéristique* ou même l'expression *fonction caractéristique* a déjà différentes acceptions dans la théorie des équations aux dérivées partielles. C'est pourquoi nous préférons employer pour la fonction Δz l'appellation de *fonction génératrice*, qui ne présente pas le même inconvénient. Il est évident, en effet, qu'il n'y a aucune confusion à craindre avec les fonctions génératrices de Laplace.

29. *Transformations infinitésimales correspondant à une fonction génératrice donnée. Groupe de Darboux.* — A toute transformation infinitésimale correspond une fonction génératrice

$$\Delta z = \Psi(x, u).$$

Cherchons, inversement, à définir les transformations infinitésimales qui correspondent à une fonction caractéristique donnée.

[1] Lie. *Transf. Gruppen*, t. II, p. 332.

Soit $\Delta z = \delta z - \Sigma \frac{\partial z}{\partial x_k} \delta x_k = \Psi(x, u)$.

Nous avons d'abord la solution simple

$$\delta z = \Psi(x, u)$$
$$\delta x_k = 0,$$

puis

$$\delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} \Psi(x, u).$$

La transformation infinitésimale ainsi obtenue est caractérisée par la propriété de laisser invariantes les variables indépendantes. A toute fonction génératrice correspond une transformation infinitésimale de cette espèce, et l'ensemble de ces transformations correspondant aux diverses fonctions génératrices forme un groupe contenu dans K et que nous appellerons le *groupe de Darboux* du système considéré. Ce nom est justifié par la relation qui existe entre ces transformations et les intégrales du système auxiliaire de M. Darboux.

A toute fonction génératrice correspond, dans le groupe de Darboux, une transformation infinitésimale déterminée.

Considérons maintenant deux transformations infinitésimales correspondant à une même fonction génératrice $\Psi(x, u)$.

Soient

$$\delta_1 x, \quad \delta_1 z, \quad \delta_1 u,$$
$$\delta_2 x, \quad \delta_2 z, \quad \delta_2 u$$

les deux transformations; on a

$$\delta_1 z - \Sigma U_k(z) \delta_1 x_k = \Psi,$$
$$\delta_2 z - \Sigma U_k(z) \delta_2 x_k = \Psi.$$

D'où l'on tire

$$\delta_1 z - \delta_2 z - \Sigma U_k(z)(\delta_1 x_k - \delta_2 x_k) = 0.$$

La transformation infinitésimale

$$\delta_1 - \delta_2 = (\delta_1 x - \delta_2 x, \delta_1 z - \delta_2 z, \delta_1 u - \delta_2 u)$$

laisse donc les intégrales invariantes et appartient, par conséquent, au groupe G. D'où cette conclusion :

On obtient la transformation infinitésimale la plus générale correspondant à une fonction génératrice donnée en ajoutant aux composantes de l'une quelconque d'entre elles celles de la transformation infinitésimale la plus générale du groupe G.

La proposition suivante en est un corollaire :

Toute transformation du groupe général K *est le produit d'une transformation du groupe de Darboux par une transformation du groupe* G.

Ce résultat, d'ailleurs, était à peu près évident *a priori*.

Nous connaissons l'expression générale des transformations infinitésimales du groupe G. Pour achever de déterminer le groupe général K, il suffit de définir l'ensemble des transformations infinitésimales du groupe de Darboux ou, ce qui revient au même, l'ensemble des fonctions caractéristiques.

50. *Détermination de l'ensemble des fonctions génératrices.* — Soit $f(x, z, p) = 0$ l'une quelconque des équations du système S. La fonction f s'annule identiquement quand on y remplace z et ses dérivées par leurs valeurs en fonction des paramètres fondamentaux. On a donc dans cette hypothèse $\frac{\partial f}{\partial u_i} = 0$ et, par suite, $\Delta f = 0$.

En supposant f exprimée à l'aide de z, de ses dérivées et des variables indépendantes, on a par conséquent l'équation

$$(15) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z - \sum \frac{\partial f}{\partial p}\Delta p = 0,$$

qui ne diffère que par la notation de l'équation correspondante du système auxiliaire de M. Darboux. Il faut cependant observer une différence importante dans l'interprétation des équations.

Lorsqu'on veut intégrer le système auxiliaire ou, plus exactement, le système S_1, formé du système S et du système auxiliaire, on cherche

à exprimer les valeurs des fonctions z et δz en fonction des *variables courantes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de constantes x^0, u^0, δu^0. Pour la fonction Δz, au contraire, nous voulons une expression contenant en général la totalité des variables courantes x, u.

L'ensemble des équations de la forme (45) constitue pour la détermination de Δz un véritable système d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, mais à une infinité de variables indépendantes. En remplaçant les Δp par leurs valeurs, on donne en effet à l'équation (45) la forme suivante

$$(45') \qquad \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \sum \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}} U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_n^{\alpha_n} \Delta z = 0.$$

La fonction z et ses dérivées p sont supposées remplacées dans l'équation (45') par leurs valeurs en fonction des x et des u.

Le résultat auquel nous sommes parvenus, quoique fort naturel en soi, n'en paraît pas moins, au premier abord, surprenant et inattendu. Il montre bien, en tout cas, que les fonctions d'une infinité de variables indépendantes sont appelées à jouer un rôle essentiel dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Mais il semblerait que nous nous heurtons ici à un obstacle presque infranchissable. La théorie des équations aux dérivées partielles d'une infinité de variables indépendantes n'existe pas encore, et, par suite, elle ne peut nous renseigner ni sur l'existence, ni sur le degré de généralité des solutions du système (45'). Devons-nous le considérer comme un ensemble de symboles vides de sens ?

Nous allons montrer que ce système est réellement intégrable et déterminer la forme de son intégrale générale.

31. *Expression générale des fonctions génératrices.* — Reprenons les équations (26) et (27) qui déterminent z et les u_i en fonction des x, x^0, u^0,

$$(26) \qquad z = \varphi(x, x^0, u^0),$$

$$(27) \qquad u_i = \varphi_i(x, x^0, u^0).$$

Nous allons regarder les x^0 comme des constantes numériques et

les u^0 comme des quantités variables. L'ensemble des fonctions définies par la première de ces équations embrasse alors la totalité des intégrales du système S. La variation δz associée à chaque intégrale du système est définie par

$$\delta z = \sum \frac{\delta z}{\partial u_i^0} \delta u_i^0. \tag{46}$$

Les quantités δu_i^0 ne sont pas des constantes numériques, mais des fonctions des variables initiales

$$\delta u_i^0 = \varepsilon_i(x^0, u^0). \tag{47}$$

A tout système de fonctions ε_i correspond une transformation faisant correspondre à toute intégrale du système S une intégrale infiniment voisine déterminée.

La fonction génératrice Δz n'est autre chose, d'après ce que nous avons vu, que l'expression de δz en fonction des x et des u, lorsqu'on suppose égales à zéro les variations des variables indépendantes. Pour obtenir cette expression, il suffira donc de remplacer, dans le second membre de l'équation (46), les variables u^0 par leurs valeurs en fonction des variables u.

On obtiendrait ces valeurs en résolvant les équations (27) par rapport aux quantités u^0. Mais on évite cette résolution par la remarque suivante :

Si les deux systèmes d'éléments $[x, u]$, $[x^0, u^0]$ appartiennent à la même intégrale du système S, on peut prendre l'un quelconque d'entre eux pour système initial, les variables de l'autre système étant les variables courantes

En prenant les x^0, u^0 comme variables initiales, on trouve les équations (27); en les prenant, au contraire, comme variables courantes, les x, u étant les valeurs initiales, on trouvera les équations analogues

$$u_i^0 = \varphi_i(x^0, x, u). \tag{48}$$

On obtiendra donc la fonction caractéristique Δz correspondant à la variation δz de l'équation (46) en y remplaçant les quantités u_i^0 par leurs valeurs (48) en fonction des x et des u.

Les fonctions $\varphi_i(x^0, x, u)$, où l'on regarde les x^0 comme des constantes, sont des invariants du groupe G. Il en est donc de même des fonctions $\varepsilon_i(x^0, u^0)$, après que l'on a effectué les substitutions indiquées.

On peut en déduire l'expression générale des fonctions génératrices.

Désignons par $\Psi_i(x, x^0, u)$ la transformée de la dérivée $\frac{\partial\varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}$:

$$\Psi_i(x, x^0, u) = \frac{\partial\varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}\Big|_{u_0=\varphi_i(x^0, x, u)};$$

l'expression (46) de δz devient alors

$$\Delta z = \Sigma\varepsilon_i\Psi_i(x, x^0, u), \tag{49}$$

les ε_i étant des invariants arbitraires du groupe G.

Telle est l'expression cherchée.

32. *Expression générale des transformations infinitésimales.* — Il est facile d'en déduire celle des transformations infinitésimales.

Soit δF *une transformation infinitésimale quelconque du groupe* K, *admettant la fonction génératrice* Ψ; *si* ε *désigne un invariant arbitraire du groupe* G, $\varepsilon.\delta$F *est une autre transformation infinitésimale du groupe* K, *admettant la fonction génératrice* $\varepsilon\Psi$.

Cette propriété est évidente pour les transformations du groupe de M. Darboux; on en déduit facilement qu'elle est générale.

Plus généralement :

Soient δ_1F, δ_2F, ..., δ_pF *des transformations infinitésimales du groupe* K, *correspondant respectivement aux fonctions génératrices* $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_p$, *et soient en outre* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ *des invariants arbitraires du groupe* G; *la transformation infinitésimale*

$$\varepsilon_1\delta_1\mathrm{F} + \varepsilon_2\delta_2\mathrm{F} + \ldots + \varepsilon_p\delta_p\mathrm{F}$$

appartient au groupe K *et admet pour fonction caractéristique*

$$\varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 + \ldots + \varepsilon_p \Psi_p.$$

Le nombre p peut même croître indéfiniment pourvu que les expressions considérées admettent alors des domaines de convergence.

Désignons par $\delta_i F$ *une transformation infinitésimale correspondant à la fonction génératrice* $\Psi_i(x, u)$ *de la formule* (19) ; *la transformation infinitésimale la plus générale du groupe* K *aura alors pour expression*

$$\delta F = \sum_1^{\alpha} \varepsilon_i \delta_i F + \sum_1^{n} \lambda_k \Gamma_k F,$$

les ε_i *désignant comme précédemment des invariants du groupe* G, *et les* λ *des fonctions entièrement arbitraires des* x *et des* u.

Ce résultat est une généralisation évidente de ceux que Lie [1] a établis pour les équations différentielles ordinaires.

55. *Remarques sur l'ensemble des fonctions génératrices.* — L'ensemble des fonctions génératrices du groupe K est linéaire par rapport aux éléments fondamentaux Ψ_i, mais les coefficients au lieu d'être des constantes sont des invariants du groupe G. Nous pourrions étendre à cet ensemble les principales propriétés des ensembles linéaires étudiés au Chapitre II, en remplaçant dans les raisonnements les dérivées ordinaires $\frac{\partial}{\partial x_k}$ par les opérations Γ_k. Cette correspondance est d'ailleurs une conséquence des relations qui existent entre les fonctions génératrices et les intégrales du système auxiliaire de M. Darboux.

Soit $\psi(x, x^0, u^0)$ une intégrale du système auxiliaire; en remplaçant u^0 par sa valeur définie par l'équation (18) en fonction des x et des u on en déduit une fonction génératrice $\Psi(x, x^0, u)$. Indiquons

(1) *Vorl. über Diff. Gleich.*, Kap. 15, p. 508 et suiv.

par le symbole $\overline{u}^0$ que nous considérons cette quantité comme une fonction des x et des u,

$$\psi(x, x^0, \overline{u}^0) = \Psi(x, x^0, u).$$

On a

$$U_k \psi(x, x^0, \overline{u}^0) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \sum \frac{\partial \psi}{\partial \overline{u}_i^0} U_k(\overline{u}_i^0)$$

et comme l'on a $U_k \overline{u}_i^0 = 0$, on trouve simplement

$$U_k \Psi(x, x^0, u) = \frac{\partial \psi(x, x^0, \overline{u}^0)}{\partial x_k}.$$

Les fonctions Ψ_i correspondent d'une manière univoque aux éléments u_i par la formule

$$\Psi_i(x, x^0, u) = \frac{\partial \varphi(x, x^0, \overline{u}^0)}{\partial \overline{u}_i^0}.$$

On vérifie facilement, en partant de là, que si le paramètre u_i est d'ordre m, les termes du moindre degré de la fonction Ψ_i ordonnée suivant les puissances des différences $x - x^0$ sont eux-mêmes d'ordre m. Pour $u = u^0$ la fonction primaire est la même que celle de la fonction $\frac{\partial \varphi(x, x^0, u_i^0)}{\partial u_i^0}$.

34. *Ensembles fondamentaux de fonctions génératrices.* — Toute fonction génératrice $\psi(x, u)$ est une combinaison linéaire et homogène des éléments fondamentaux $\Psi_i(x, x^0, u)$, exprimée par la formule (19), les coefficients arbitraires ε_i étant, comme nous l'avons vu, des invariants du groupe G. Supposons maintenant que nous ayons défini de quelque manière un ensemble linéaire de fonctions génératrices

$$a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \ldots + a_m \psi_m + \ldots,$$

les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ étant des *constantes* arbitraires.

En remplaçant ces constantes par des *invariants* du groupe G on

obtiendra un ensemble de fonctions génératrices qui pourra être plus général. Pourra-t-on reconstituer ainsi l'ensemble complet des fonctions génératrices du groupe K?

Pour résoudre cette question nous allons examiner le développement d'une fonction génératrice quelconque $\psi(x, u)$. Considérons l'identité

$$\psi(x, u) = \sum \varepsilon_i(x, x^0, u)\,\Psi_i(x, x^0, u).$$

La fonction $\psi(x, u)$ équivaut à une variation infinitésimale δz du groupe de M. Darboux, et cette même variation δz pourrait s'obtenir par la variation des variables initiales u^0 dans la formule

$$z = \varphi(x, x^0, u^0).$$

De telle sorte que l'on a, en vertu des équations (48),

$$\sum \frac{\partial \varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}\,\delta u_i^0 = \sum \varepsilon_i(x, x^0, u)\,\Psi_i(x, x^0, u),$$

et comme la dérivée $\frac{\partial \varphi(x, x^0, u^0)}{\partial u_i^0}$ est équivalente à $\Psi_i(x, x^0, u)$ il en résulte que δu_i^0 est équivalent à $\varepsilon_i(x, x^0, u)$, en vertu des mêmes équations (48). Or on peut construire δu_i à l'aide de δz.

Soit $u_i = \theta_i(x, z, p)$, on en tire

$$\delta u_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial z}\,\delta z + \sum \frac{\partial \theta_i}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}\,\delta p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}.$$

Si l'on considère la variation particulière δz qui correspond à la fonction génératrice ψ, on trouve

$$\delta u_i = \frac{\partial \theta_i}{\partial z}\,\psi + \sum \frac{\partial \theta_i}{\partial p_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}\,U_{\alpha_1}\,U_{\alpha_2}\ldots U_{\alpha_n}\,\psi.$$

Représentons l'expression du second membre par $\Theta_i\,\psi$, et écrivons

$$\delta u_i = \Theta_i\,\psi.$$

Faisons $x = x^0$, et attribuons aux u les valeurs arbitraires u^0; on a alors

$$\varepsilon_i(x^0, x^0, u^0) = \Theta_i \psi \,|_{x_0, u_0}.$$

Cette condition ne détermine pas d'ailleurs complètement les invariants ε_i quand on regarde les u^0 comme des constantes numériques; ces invariants sont définis par la condition de se réduire, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, à des *fonctions arbitraires* des u. Pour achever de les déterminer il ne suffit donc pas de connaître les valeurs *numériques* $\varepsilon_i(x, x^0, u^0)$, il faut aussi l'*ensemble* de leurs dérivées par rapport aux variables u, pour le même système de valeurs initiales.

La fonction $\Psi_i(x, x^0, u)$ est caractérisée par les conditions suivantes, qui ont lieu pour $x = x^0$ *quelles que soient les valeurs des* u,

$$(50) \qquad \begin{cases} \Theta_i \Psi_i = 1, \\ \Theta_j \Psi_i = 0 \qquad (j \neq i). \end{cases}$$

Supposons que l'ensemble considéré de fonctions possède un degré suffisant de généralité pour qu'on puisse choisir arbitrairement les valeurs *numériques* des expressions $\Theta_i \psi$ quand on attribue aux x et aux u des valeurs *constantes* arbitraires x^0, u^0. Il sera alors possible de choisir les coefficients a_k de manière que les équations (50) aient lieu, non pas identiquement quels que soient les u, mais pour les valeurs *constantes* x^0, u^0. Les valeurs considérées des a_k sont des fonctions des quantités x^0, u^0, $a_k(x^0, u^0)$. Remplaçons dans ces fonctions les quantités u^0 par leurs valeurs en fonction des x et des u données par les équations (48).

Les constantes $a_k(x^0, u^0)$ sont alors remplacées par des invariants du groupe G, $\varepsilon_k(x, x^0, u)$, satisfaisant à la relation suivante quels que soient les u,

$$\varepsilon_k(x^0, x^0, u) = a_k(x^0, u).$$

La fonction génératrice correspondante

$$\sum \varepsilon_k \psi_k$$

satisfera donc aux équations (50) quels que soient les u, pour $x = x^0$.

Nous dirons pour cette raison que l'ensemble considéré

$$\psi = \Sigma a_k \psi_k$$

est *fondamental* s'il est possible d'attribuer aux constantes a des valeurs telles que les expressions $\Theta_i \psi$ prennent des *valeurs numériques* arbitraires quand on donne aux variables x, u des valeurs initiales quelconques x^0, u^0.

On retrouve cette notion d'ensemble fondamental dans l'étude de la transitivité des groupes.

35. *Transformations équivalentes.* — Nous dirons que deux transformations infinitésimales sont équivalentes si elles admettent la même fonction génératrice.

Deux transformations équivalentes appliquées successivement à une intégrale donnée conduisent toujours à la même intégrale transformée.

Soient δf et $\delta_1 f$ deux transformations équivalentes. On a entre elles une relation identique de la forme

$$\delta_1 f = \delta f + \sum_k \lambda_k U_k f.$$

Supposons que f soit un invariant du groupe G; la relation précédente donne alors

$$\delta_1 f = \delta f. \tag{51}$$

Réciproquement, si la relation (51) a lieu pour toute transformation δ_1 équivalente à δ, il est évident que la fonction considérée f est un invariant du groupe G.

36. *L'accolade de Lie.* — Supposons que deux transformations δ, δ_1 admettent respectivement les fonctions génératrices Ψ, Ψ_1. Formons la parenthèse $(\delta\delta_1)f$. Soit

$$\delta f = \Delta f + \Sigma \delta x_k U_k f,$$
$$\delta_1 f = \Delta_1 f + \Sigma \delta_1 x_k U_k f.$$

On a, à cause de la permutabilité des opérations U_k et Δ,

$$(52)\qquad (\delta\delta_1)f = (\Delta\Delta_1)f + \sum_k (\Delta\delta_1 x_k - \Delta_1\delta x_k)\, U_k f.$$

Les deux transformations $(\delta\delta_1)$ et $(\Delta\Delta_1)$ sont donc équivalentes et admettent par conséquent la même fonction génératrice.

Cette fonction génératrice a pour expression

$$(\Delta\Delta_1)z = \Delta\Delta_1 z - \Delta_1\Delta z = \Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi.$$

Donc, quand on connaît deux fonctions génératrices Ψ et Ψ_1, on peut en déduire une troisième

$$\Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi = \sum \frac{\partial\Psi_1}{\partial u_i}\Delta u_i - \sum \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\Delta_1 u_i,$$

ou encore, en introduisant les opérations Θ_i des équations (50),

$$\Delta\Psi_1 - \Delta_1\Psi = \sum \frac{\partial\Psi_1}{\partial u_i}\Theta_i\Psi - \sum \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\Theta_i\Psi_1.$$

Nous représenterons cette fonction génératrice par le symbole

$$\{\Psi, \Psi_1\},$$

suivant la notation employée par Lie [1] pour les transformations de contact.

37. *Propriétés des accolades de Lie.* — Les accolades de Lie satisfont aux relations suivantes, où les ε désignent des invariants du groupe G :

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned}
&\{\Psi, \Psi\} = 0,\\
&\{\Psi, \varepsilon\Psi\} = \Delta\varepsilon\Psi,\\
&\{\Psi, \varepsilon\Psi_1\} = \Delta\varepsilon\Psi_1 + \varepsilon\{\Psi, \Psi_1\},\\
&\{\Psi, \varepsilon_1\Psi_1 + \varepsilon_2\Psi_2 + \ldots + \varepsilon_p\Psi_p\} = \sum_1^p \Delta\varepsilon_i\Psi_i + \sum_1^p \varepsilon_i\{\Psi, \Psi_i\},\\
&\{\Psi_i\{\Psi_k, \Psi_l\}\} + \{\Psi_k\{\Psi_l, \Psi_i\}\} + \{\Psi_l\{\Psi_i, \Psi_k\}\} = 0.
\end{aligned}\right.$$

---

[1] *Transf. Grupp.*, t. II, p. 320.

Prenons la suite des éléments fondamentaux de l'ensemble des fonctions caractéristiques (49) et formons avec deux quelconques d'entre elles l'accolade de Lie $\{\Psi_i, \Psi_k\}$.

Comme le résultat appartient encore à l'ensemble, on a nécessairement

$$\{\Psi_i, \Psi_k\} = \sum_s \varepsilon_{iks} \Psi_s, \tag{54}$$

les coefficients ε_{iks} étant des invariants du groupe G, et satisfaisant aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{iks} + \varepsilon_{kis} = 0, \\ \Delta_r \varepsilon_{ikj} + \Delta_i \varepsilon_{rkj} + \Delta_k \varepsilon_{rij} + \sum_v (\varepsilon_{ikv}\varepsilon_{rvj} + \varepsilon_{irv}\varepsilon_{kvj} + \varepsilon_{krv}\varepsilon_{ivj}) = 0. \end{array}\right. \tag{55}$$

Nous avons défini dans ce qui précède les éléments principaux dont la considération s'impose quand on veut entreprendre une étude rationnelle des ensembles d'intégrales.

Nous en ferons quelques applications dans un prochain Mémoire.

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME IX

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 188[illegible].

(*Note de la Rédaction*)

[S2] Sur quelques fonctions de point dans le mouvement d'un fluide; par M. *Paul Appell*.....

[R9b] Sur les percussions dans les systèmes non holonomes; par MM. *Beghin* et *Rousseau*.....

[R9b] Remarques sur les systèmes non holonomes; par M. *Paul Appell*.....

[R8h] Extension du théorème de Carnot au cas où certaines liaisons dépendent du temps; par M. *Beghin*.....

[M²8] Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique; par M. *Émile Picard*.....

[G4b] Les fonctions abéliennes singulières et les formes quadratiques; par M. *G. Humbert*.....

[H5] Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes; par M. *H. Poincaré*.....

[D3] Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor; par M. *Ernst Lindelöf*.....

[D3] Sur la fonction définie par une série de Maclaurin; par M. *Walter-B. Ford*.....

Pages.

[S2b] Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides; par M. *P. Duhem* 233

[J5] Contribution à l'analyse arithmétique du continu; par M. *Émile Borel* 329

[F5d] Extrait d'une Lettre de M. *Robert Pech* à M. *Jordan* 376

[I14a] Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental; par M. *Lerch* 377

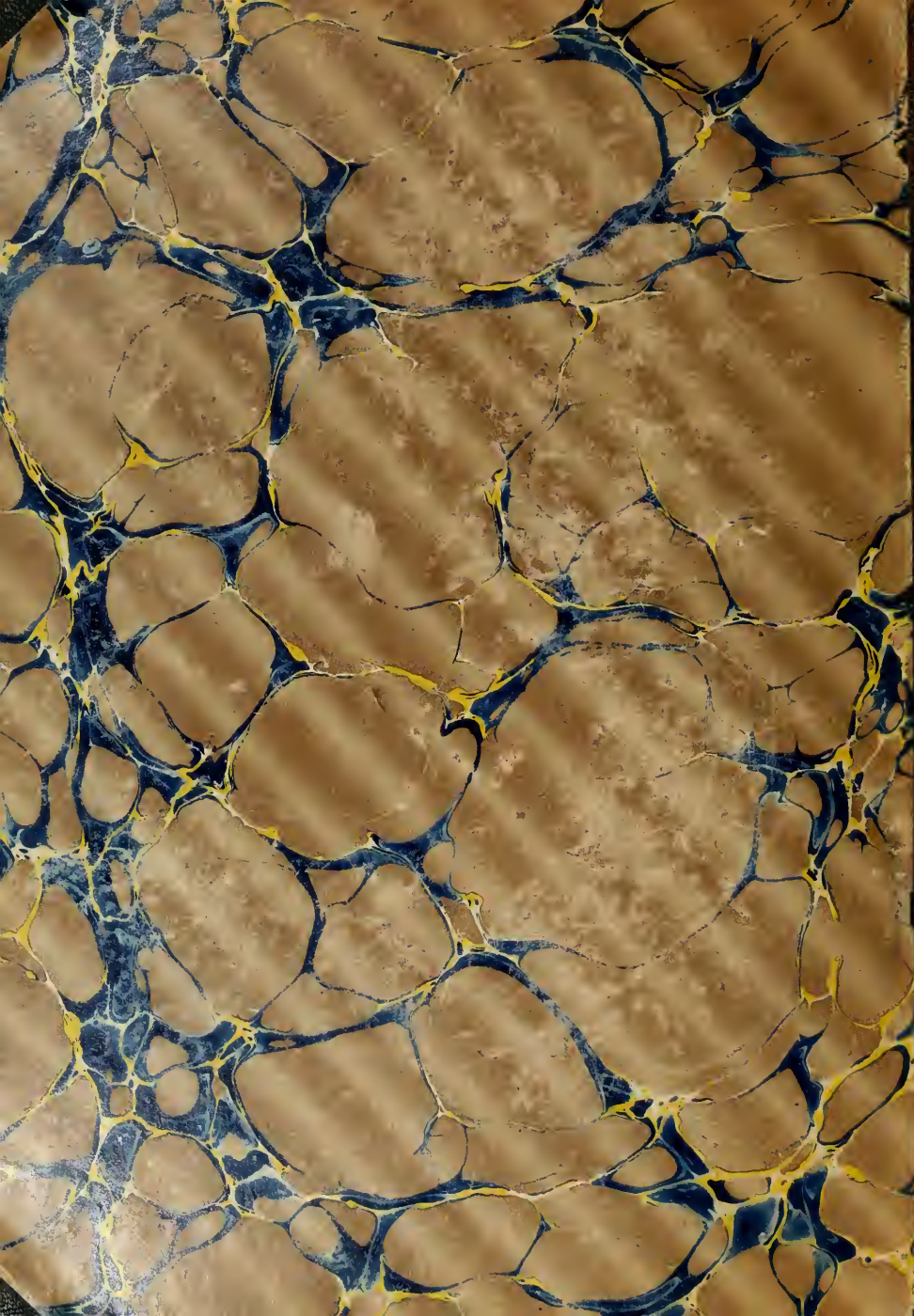
[H7] Recherches sur les équations aux dérivées partielles; par M. *J. Le Roux* 403

FIN DU TOME IX DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

32816. PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér. 5
t. 11

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY